

AS PRÁTICAS DE ENSINO DE GRANDEZAS E MEDIDA NO 1.º CICLO DO ENSINO BÁSICO - UMA PERSPETIVA ONTOSSEMIÓTICA

*Isabel Cláudia Nogueira*¹

¹ Escola Superior de Educação de Paula Frassinetti/CIPAF, isa.claudia@esepf.pt

Resumo. *A partir de um estudo exploratório sobre grandezas e medida no 1.º ciclo do Ensino Básico – que estabeleceu como objetivos determinar que práticas matemáticas são implementadas na sala de aula, qual a natureza do conhecimento presente e/ou emergente em tais práticas, que relações são estabelecidas entre objetos e processos matemáticos e didáticos implicados nessas práticas, que funções aí desempenham professor e alunos e, ainda, que recursos materiais apoiam essas práticas –, apresenta-se neste texto a descrição das práticas matemáticas mais significativas identificadas nos processos de ensino analisados. Os resultados obtidos evidenciaram o uso de situações extramatemáticas e/ou do quotidiano e o predomínio de conhecimento procedimental e algorítmico como as práticas matemáticas mais características destes processos de ensino.*

Abstract. *Based on an exploratory study of Measurement classroom practices in the 1st cycle of Primary Education – which set as objectives to determine which are the mathematical classroom practices, what is the nature of present and/or emerging knowledge in such practices, what relationships are established between mathematical and didactic objects and processes implied in those practices, what functions do teacher and students play in classroom practices and what kind of resources support these practices –, this paper presents the most significant practices identified in the study processes analyzed. The results obtained evidenced the use of extra-mathematical and/or from daily life and the predominance of procedural and algorithmic knowledge as the most characteristic mathematical practices of these study processes.*

Palavras-chave: *análise didática; modelo ontossemiótico; práticas de sala de aula; grandezas e medida; ensino básico.*

1. Introdução

A descrição e reflexão de práticas da sala de aula parecem-nos componentes fundamentais à compreensão dos processos de aprendizagem/ensino da Matemática. Não negligenciando a importância das atividades a montante desse momento, a análise de práticas letivas afigura-se preponderante na construção de um cenário que ilustre o desenvolvimento curricular desta disciplina, contribuindo para um alargamento do *corpus* de conhecimentos da Educação Matemática.

Fruto do desenvolvimento e implantação de perspetivas de cariz sociocultural e situado da cognição, da aprendizagem e do ensino, segundo as quais não é possível separar o conhecimento do(s) contexto(s) em que este é adquirido, assiste-se ao renascer do

interesse por estudos sobre as práticas educativas, concebidas como indiscutíveis fontes de conhecimento, encarando a aula como um contexto de ensino e de aprendizagem construído por professores e alunos. Assim, quando tentamos compreender as interações dos intervenientes em processos estudo, o estudo da configuração de práticas escolares apresenta-se como um processo apropriado: a clarificação do desenvolvimento curricular na exploração da Medida, nomeadamente no que concerne ao currículo implementado neste tema matemático, possibilitada pela análise detalhada de práticas letivas de Matemática no 1.º ciclo do Ensino Básico, poderá permitir detetar dificuldades sentidas na sua realização e aspetos que as influenciem, contribuindo para um melhor entendimento desses processos. A perceção de que tarefas de carácter relativamente rotineiro – cálculo de medidas, aplicação de fórmulas e conversão de unidades – constituíam o centro das atividades de sala de aula no âmbito da exploração da Medida consubstancia-se na literatura existente. A par da utilização pouco significativa de instrumentos de medida, a prevalência desse tipo de tarefas nos diferentes tópicos sobre medida é apontada como estando na origem de uma aprendizagem por processos de memorização de fórmulas e de repetição de procedimentos (Battista & Clements, 1996; Outhred & Mitchelmore, 2000; Clements & Bright, 2003; Kamii, 2006).

Neste trabalho, apresentamos resultados parcelares da análise didática realizada a processos de ensino e aprendizagem de grandezas e medidas no 1.º ciclo do Ensino Básico. Após a inclusão de contributos da literatura sobre a exploração de grandezas e medida apresentada na secção 2, procede-se na secção 3 à apresentação do marco teórico que sustenta a análise dos processos de ensino. Na secção 4 são explicitados os contornos metodológicos da investigação desenvolvida e que produziu os resultados descritos na secção 5, que evidenciam e exemplificam o tipo de práticas matemáticas desenvolvidas em esses processos de ensino e aprendizagem. Conclui-se este trabalho na secção 6 com algumas reflexões finais decorrentes da sua elaboração.

2. A Medida no Ensino Básico

No panorama recente da investigação em Didática da Matemática, não tem sido muito numerosa a produção relacionada com práticas do tema Medida no Ensino Básico. No contexto português, subsiste a necessidade de realização de estudos sobre os processos desenvolvidos nas práticas educativas da aprendizagem e do ensino da Matemática específicas para o 1.º ciclo (Gomes, Ralha e Hirst, 2001), nomeadamente no que diz

respeito a práticas relacionadas com a abordagem de grandezas e dos processos de medição. Partilhando com Chamorro (2001) da necessidade de identificação e compreensão dos aspectos didáticos específicos à aprendizagem e ensino destes conteúdos, entendemos tanto a sua descrição como a sua explicação como ferramentas eficazes e adequadas ao serviço da engenharia didática nesta área, alimentando um corpo de conhecimentos essencialmente ao nível do currículo implementado nas salas de aula do 1.º ciclo aquando das explorações das grandezas e dos processos de medição.

Do ponto de vista matemático, a complexidade inerente à formalização dos conceitos integrados na Medida torna, para a mesma autora, a sua aprendizagem e o seu ensino tradicionalmente difíceis: para os alunos, que não os chegam a compreender, reduzindo-os apenas à manipulação e memorização de regras eminentemente aritméticas subjacentes ao funcionamento do Sistema Métrico Decimal; para os professores, na sua tarefa de os apresentarem aos seus alunos de forma compreensível (Chamorro, 1995). Por outro lado, e segundo a mesma autora, a acessibilidade a instrumentos de medição tecnologicamente sofisticados que substituem grandezas por números – balanças digitais e instrumentos utilizando tecnologia *laser*, por exemplo –, permitem falar de uma crescente “*aritmização da medida*” (1995, p. 36), desvalorizando o seu carácter topológico, desvanecendo os contornos inerentes à conservação da grandeza e transpondo a ordenação de objetos de uma dada grandeza para uma ordenação numérica, entre outras reduções. A compreensão das relações estabelecidas entre conceitos, professor e alunos durante esses processos revela-se por isso essencial ao tratamento didático destes temas.

Na exploração dos conceitos de grandeza e/ou medida, Aires e Campos (2011) apontam não só as dificuldades detetadas nas práticas deste tema como referem igualmente os erros mais comuns dos alunos, salientando o não reconhecimento da relação de proporcionalidade inversa entre unidade de medida e valor da grandeza a medir, a recorrente confusão entre os conceitos de perímetro e área (e também entre área e volume), o uso excessivo de valores inteiros (levando os alunos a assumir apenas os números inteiros como medidas exatas) e a utilização de dados irreais em enunciados (que poderão dificultar quer atividades de estimação, quer mesmo o seu espírito crítico). Para as mesmas autoras, uma inadequada análise sensorial (estimar uma grandeza através do recurso a um sentido errado) poderá, em certos casos, justificar a seleção incorreta do instrumento de medição, que apontam ainda a baixa utilização de diferentes

instrumentos de medição em situações variadas como causa para a manipulação inadequada dos mesmos e, conseqüentemente, para a obtenção de medições erradas.

3. Marco teórico de referência

A abrangência e complexidade que caracterizam o estudo de práticas de sala de aula orientaram a procura de um marco teórico e metodológico que, no âmbito da Educação Matemática, disponibilizasse ferramentas adequadas para descrever, analisar e interpretar estas práticas: o modelo Ontossemiótico da Cognição e Instrução Matemática (EOS), descrito em Godino e Batanero (1998) e em Godino, Contreras e Font (2006), afigurou-se-nos adequado a estas exigências.

O EOS considera os objetos matemáticos como entidades emergentes de “*sistemas de práticas manifestadas por um sujeito (ou instituição) perante um conjunto de situações-problema*” (Godino, 2002, p. 242), classificadas como operativas (toda a ação realizada por alguém para resolver problemas matemáticos), discursivas ou comunicativas (visando a comunicação e a validação da solução) ou normativas ou de regulação (permitindo a sua generalização a outros problemas ou contextos). A realização de qualquer prática matemática implica, para este modelo, a mobilização de um conjunto de objetos primários, que poderão ser de distintos tipos (situações-problema, linguagem, definições e conceitos, proposições, procedimentos e argumentos) e que serão os constituintes básicos de objetos de complexidade superior (*ibidem*, p. 246) obtidos por processos matemáticos.

As aplicações deste modelo, descritas em Gonzato, Godino e Neto (2011), Crisóstemo (2012), Fernández, Godino e Cajaraville (2012), Aké (2013) e Drivers *et al.* (2014), atestam a sua utilidade na compreensão de processos de estudo na sua complexidade, pelo que foi assumido como marco concetual de referência a esta investigação.

4. Opções metodológicas

Optou-se pela realização de um estudo interpretativo, de natureza eminentemente descritiva, suportado na análise de excertos de aulas do 1.º ciclo do Ensino Básico, inscrevendo-se esta investigação como um estudo de caso agregado (Patton, 1990; Ponte, 1994; Stake, 1994). A opção de recolha de dados recaiu na observação naturalista e não participante, em consonância com Yin (2005) e Estrela (1986).

Este texto descreve os resultados obtidos na identificação e análise de práticas matemáticas, de natureza discursiva e operativa, presentes ou emergentes nessas aulas, respeitando noções teóricas do EOS detalhadas em D'Amore, Font e Godino (2007), em Font e Contreras, (2008), em Godino, Font, Wilhelmi e Castro (2009) e em Font, Planas e Godino (2010), por exemplo.

5. Apresentação de resultados

Na fase inicial deste ciclo de escolaridade (1.º e 2.º anos), as manifestações de natureza discursiva dos alunos recaem essencialmente na apresentação de propostas de procedimentos de medição, de comunicação e por vezes de interpretação dos resultados e de elaboração de justificações para as soluções encontradas. A prática discursiva docente incide na apresentação oral de contextos extramatemáticos como motivação para as tarefas e de contextos intramatemáticos para a explicitação de conteúdos; destina-se também a gerir as intervenções dos alunos e a promover a institucionalização de conceitos.

As práticas operativas dos alunos incidem em técnicas de determinação de quantidades da grandeza, por comparação direta ou indireta, e de utilização de instrumentos de medição. A comparação direta baseia-se na utilização de unidades de natureza antropomórfica e outras unidades não; a medição indireta apoia-se na utilização de instrumentos de medida de uso comum (réguas, fitas métricas e balanças). A exemplificação de técnicas e de utilização de instrumentos de medição, a par da validação de procedimentos e da avaliação das soluções, são as práticas matemáticas mais frequentemente desenvolvidas pelo docente.

A tabela 1 inclui evidências das práticas identificadas no 1.º ano de escolaridade.

Tabela 1. Práticas operativas e discursivas no 1.º ano

P: Vamos imaginar que a M. vai andar de balancé com a irmã mais velha. O que acontece se alguém sai de um lado?
<i>A professora coloca o estojo num dos pratos da balança e no outro coloca um cone de revolução em madeira.</i>
P: O que é mais pesado, I.?
Al: O estojo do J.M.
P: Porquê?
Al: Porque está a cair mais para baixo!
P: Isso significa que é tão pesado que faz força para baixo.
P: Quando medimos a nossa altura o que é que usamos? Se calhar um carpinteiro

usa outro utensílio...
P: Hoje nós utilizamos então o metro para fazermos medições, porque assim não há confusões, é tudo igual! Já alguém viu utilizar o metro?
Al: O meu pai quando quer vender as casas.
P: Para quê?
Al: Para os senhores saberem o tamanho.
P: Imaginem agora – que vão para o segundo ano – que vão comprar uma nova mochila. Há mochilas de muitos tamanhos. Mas vocês não sabem se os vossos livros cabem lá dentro. O que fazemos?
L: Podemos medir os livros para ver se cabem.

Na tabela 2, que a seguir se apresenta, estão incluídos exemplos respeitantes a aulas do 2.º ano de escolaridade

Tabela 2. Práticas operativas e discursivas no 2.º ano

<p>P: Vocês então vão todos à Comunhão!</p> <p>Als: Sim!</p> <p>P: Então agora façam de conta que eu sou a vossa mãe e estou a organizar a vossa festa. Reparei que me faltam algumas coisinhas...</p>															
<p>P: Imaginem que queríamos medir a largura da porta e não temos nada connosco. O que fazemos?</p> <p>Al: Abrimos os braços e...</p> <p>Al: Já sei! Púnhamos as mãos; se não chegassem púnhamos outra. Depois se fossem quatro a medida era quatro.</p> <p>P: <i>[dirigindo-se ao aluno que falou]</i> Vem mostrar na porta. <i>A criança levanta-se, dirige-se à porta e mede a sua largura utilizando palmos.</i></p> <p>P: Outra maneira. B.</p> <p>Al: Se tivermos uma régua muito grande também conseguimos medir a porta.</p> <p>P: Mas nós não temos! Não temos nada connosco.</p> <p>Al: Já sei, com os pés!</p> <p>P: <i>[dirigindo-se ao aluno que fez a última proposta]</i> Vem-nos mostrar. <i>O aluno mede a largura da porta, verificando que esta corresponde a quatro passos.</i></p>															
<p>P: Então agora vamos utilizar uma medida igual para toda a gente. Vou também dar um clip a cada grupo e vão medir a capa, o caderno e a palhinha. Viram que quando medimos com palmos não deu igual a toda a gente. Agora vamos ver quantos clips contam.</p> <p><i>Os alunos começam a efectuar as suas medições. Em todos os grupos o ambiente é calmo. São utilizadas duas estratégias: nuns grupos, a repetição da unidade é conseguida rodando o clip sobre si mesmo; noutras, marcando a extremidade do clip antes de o retirar para prosseguirem a medição. A professora vai circulando pelos grupos, verificando os procedimentos e ajudando, quando necessário</i></p>															
<p>P: Agora vamos ver quais foram os valores obtidos com os fios.</p> <p><i>A professora volta ao quadro e regista os novos valores obtidos por cada grupo, completando a tabela anterior:</i></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th></th> <th><i>clips</i></th> <th><i>fios</i></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Grupo 1</td> <td>8 e meio</td> <td>3 e meio</td> </tr> <tr> <td>Grupo 2</td> <td>9 e meio</td> <td>2 e um terço</td> </tr> <tr> <td>Grupo 3</td> <td>12</td> <td>3 e meio</td> </tr> <tr> <td>Grupo 4</td> <td>11 e meio</td> <td>3 e meio</td> </tr> </tbody> </table>		<i>clips</i>	<i>fios</i>	Grupo 1	8 e meio	3 e meio	Grupo 2	9 e meio	2 e um terço	Grupo 3	12	3 e meio	Grupo 4	11 e meio	3 e meio
	<i>clips</i>	<i>fios</i>													
Grupo 1	8 e meio	3 e meio													
Grupo 2	9 e meio	2 e um terço													
Grupo 3	12	3 e meio													
Grupo 4	11 e meio	3 e meio													

	Grupo 5	6 e meio	5 e meio
P:	Eu dei um clip e um fio a cada grupo. Porque será que dá números diferentes?		
Als:	Porque têm tamanhos diferentes.		
P:	Reparem no tamanho dos fios. Já viram como este é pequeno? Estão a ver que é por isso que tiveram de ...		
Al:	... o utilizar mais vezes!		
P:	Como aconteceu quando medimos o comprimento da sala, que não deu igual.		

Nas aulas dos dois primeiros anos de escolaridade, destaca-se a presença de entidades matemáticas de natureza linguística e de carácter procedimental, associadas à determinação de quantidades de grandeza, materializados verbalmente e recorrendo a representações simbólicas. As proposições enunciadas são raramente fundamentadas em objetos matemáticos e as sequências argumentativas observadas evidenciam formulações em que estão praticamente ausentes regras e especificidades da linguagem matemática.

No 3.º e no 4.º ano de escolaridade, e como podemos constatar nos exemplos integrados nas tabelas 3 e 4, regista-se maior prevalência em práticas de natureza algorítmica. As ações dos alunos centram-se na exercitação de técnicas de representação simbólica de quantidades de medida e de realização de cálculos para determinação de valores de medida, subsistindo residualmente atividades de medição (indireta) por recurso a instrumentos de medição. O professor vai gerindo os processos de exercitação desenvolvidos, procedendo à sua exemplificação e validando os resultados, terminando habitualmente cada configuração com a institucionalização do conhecimento posto em jogo no processo de ensino. No domínio discursivo, a enunciação de proposições e a formulação de soluções para as tarefas são insistentemente suportadas por registos escritos, requerendo a leitura e interpretação de enunciados por parte dos alunos e representação escrita dos resultados.

Tabela 3. Práticas operativas e discursivas no 3.º ano

P:	Quantos centímetros são do zero ao um?
Als:	Um centímetro.
P:	E quanto é do quarenta e cinco ao quarenta e seis?
Als:	Um centímetro.
P:	Um centímetro é só um bocadinho pequenino dos que têm no metro articulado. E quantos centímetros tem o vosso metro articulado?
Al:	Cem.
P:	E como se chama este pedacinho [<i>referindo-se a um decímetro</i>]?
Als:	Decímetro.

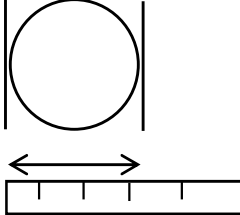
<p>P: Então um decímetro está dividido em quantos centímetros? Als: Dez. P: Então o decímetro está dividido em dez partes iguais.</p>
<p>Al: Um dia tem vinte e quatro horas, mas em vez de fazermos a soma de vinte e quatro horas sete vezes fazemos vinte e quatro a multiplicar por sete! P: Alguém tem outra explicação? Al: Nós sabemos que uma semana tem sete dias e um dia tem vinte e quatro horas, então, fazemos logo directamente sete vezes vinte e quatro. P: Ou vinte e quatro vezes sete. <i>No quadro, o aluno resolve a multiplicação</i> 24 e escreve $24 \times 7 = 168$</p> $\begin{array}{r} 24 \\ \times 7 \\ \hline 168 \end{array}$ <p><i>completando no quadro:</i> E uma semana? <u>Uma semana tem 168 horas.</u></p>

Os registos simbólicos e gráficos assumem especial importância nas dinâmicas de aula nos dois últimos anos de, constituindo a tradução ostensiva de conceitos (não ostensivos) envolvidos nas práticas, das propriedades nelas reconhecidas e dos procedimentos algorítmicos realizados; as proposições enunciadas são fruto dos resultados que vão sendo obtidos na resolução das situações exploradas e em alguns casos traduzem equivalências previamente instituídas.

Tabela 4. Práticas operativas e discursivas no 4.º ano

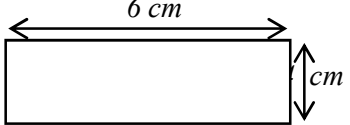
<p style="text-align: center;">Situação Problemática:</p> <p>O Manuel partiu da estação de comboios Coimbra B às 11h 40m. A viagem até Aveiro demorou 30 minutos. A que horas chegou o Manuel a Aveiro?</p> <p><i>Três alunos respondem de imediato.</i></p> <p>P: Raciocinem mentalmente comigo. F., Meio dia e dez, porquê? Al: Se passassem vinte minutos era ao meio-dia, assim como são trinta são mais dez, então é meio-dia e dez. P: P., diz lá tu! <i>O aluno repete a justificação. O professor pede-lhe que vá ao quadro para ir resolver a situação colocada. O aluno escreve no quadro:</i></p> $\begin{array}{r} 11 \text{ h } 40 \text{ min} \\ + 00 \text{ h } 30 \text{ min} \\ \hline 11 \text{ h } 70 \text{ min} \end{array}$ <p>P: Então, meio-dia e dez ou onze horas e setenta? Al: É indiferente! P: Não, não é! Al: Posso ir fazer diferente? P: Vai lá ao quadro fazer. <i>O aluno dirige-se ao quadro, e vai explicando à medida que vai escrevendo:</i></p> $\begin{array}{r} 11 \text{ h } 40 \text{ m} \\ + 00 \text{ h } 20 \text{ m} \\ \hline 12 \text{ h } 00 \text{ m} \\ + \quad 10 \text{ m} \\ \hline 12 \text{ h } 10 \text{ m} \end{array}$

O professor dirige-se ao quadro onde representa:



P: Assim, eu não determinava o diâmetro?
 Als: Sim.

No quadro, o professor acrescenta:



Calcula o perímetro da figura
 $P =$

Um aluno vai ao quadro e completa a igualdade: $P = 6+6+4+4 = 20 \text{ cm}$

Em todos os anos de escolaridade as atividades são suportadas em processos de comunicação e representação de noções, procedimentos e propriedades matemáticas, visíveis mediante processos de materialização: os conceitos e as proposições enunciados, de carácter essencialmente não ostensivo, são concretizados com recurso à linguagem verbal (no registo oral e na sua representação escrita) e por vezes em linguagem simbólica; os procedimentos matemáticos de índole algorítmica executados – comparação de quantidades de grandeza, determinação de valores de quantidades de grandeza por medição e resolução de operações de cálculo de valores de medida – são suportados por registos materializados com recurso a linguagem simbólica e gráfica.

6. Reflexões finais

A análise de processos de ensino sobre grandezas e medida no 1.º ciclo do Ensino Básico revelou como práticas matemáticas: o recurso a situações extramatemáticas e/ou do quotidiano dos alunos como pontos de partida para a mobilização de conteúdos; a prevalência de práticas algorítmicas, de natureza manipulativa (manuseamento de instrumentos de medida) e operativa (determinação de quantidades de medida) em detrimento de exploração concetual; o predomínio de objetos e processos matemáticos suportados na linguagem verbal, nos anos iniciais, e na linguagem simbólica e gráfica, no final do 1.º ciclo de escolaridade.

A aplicação de ferramentas didáticas disponibilizadas pelo modelo EOS, parcialmente descrita neste texto, proporciona uma maior visibilidade da sala de aula, entendida como um contexto de ensino e aprendizagem construído pelas atividades desenvolvidas por

alunos e professor, tornando possível explicitar *o que e como* os alunos aprendem e *o que e como* os professores ensinam Matemática.

A análise de práticas sobre uma grandeza específica transversal aos quatro anos do 1.º ciclo, ou orientadas por um único professor com a sua turma durante um ano letivo ou, ainda, focadas na integração de recursos didáticos nas aulas sobre grandezas e medida, são outras possibilidades de investigação.

Referências bibliográficas

- Aires, A.P. & Campos, H. (2011). Construção intuitiva do conceito de medida. In P. Palhares, A. Gomes, E. Amaral (Coords.), *Complementos de Matemática para Professores do Ensino Básico* (pp. 47-62). Lisboa: Lidel-Edições Técnicas.
- Aké, L.P. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación*. Tese de doutoramento, Universidad de Granada, Espanha.
- Battista, M. T. & Clements, D. H. (1998). Students' understanding of three-dimensional cube arrays: Findings from a research and curriculum development project. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 227-248). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Chamorro, M.C. (1995). Aproximación a la medida de magnitudes en la Enseñanza Primaria. *Uno*, 3, 31-53.
- Chamorro, M.C. (2001). Las dificultades en la enseñanza aprendizaje de las magnitudes en educación primaria y E.S.O. In E. Fernández González (Coord.), *Dificultades del Aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 79-122). Madrid: Ministério de Educación, Cultura e Deporte, Instituto Superior de Formación del Profesorado.
- Clements, D. H. & Bright, G. (Eds.) (2003). *Learning and teaching measurement, 2003 yearbook*. Reston, VA: NCTM.
- Crisóstemo, E. (2012). *Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: Una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional*. Tese de doutoramento, Universidad de Granada, Espanha.
- D'Amore, B., Font, V. & Godino, J.D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma*, XXVIII(2), 49-77.
- Drijvers, P. Godino, J.D., Font, V. & Trouche, L. (2013). One episode, two lenses. A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 23-49.
- Estrela, A. (1986). *Teoria e Prática de Observação de Classes. Uma Estratégia de Formação de Professores*. Lisboa: Instituto Nacional de Investigação Científica.
- Fernández, T., Godino, J.D. & Cajaraville, J.A. (2012). Razonamiento Geométrico y Visualización Espacial desde el Punto de Vista Ontosemiótico. *Bolema*, 26(42), 39-63.
- Font, V. & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 33-52.
- Font, V., Planas, N. & Godino, J.D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(2), 89-105.
- Gomes, A., Ralha, E. & Hirst, K. (2001). Sobre a formação matemática dos professores do 1º Ciclo: Conhecer e compreender as possíveis dificuldades, In I. C. Lopes, M. Cecília

- Costa (Orgs.), *Actas do XII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 175-196. Lisboa: APM.
- Godino, J.D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3), 237-284.
- Godino, J.D. & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In A. Sierpiska, J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.
- Godino, J.D., Contreras, A. & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 26(1), 39-88.
- Godino, J.D., Font, V., Wilhelmi, M.R. & Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59-76.
- Gonzato, M., Godino, J.D. & Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didácticomatemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, 23(3), 5-37.
- Kamii, C. (2006). Measurement of length: How can we teach it better? *Teaching Children Mathematics*, 13(3), 154-158.
- Outhred, L. N. & Mitchelmore, M. C. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 144-167.
- Patton, M.Q. (1990). *Qualitative evaluation methods*. London: Sage.
- Ponte, J.P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, 3(1), 3-18.
- Stake, R. (1994). Case studies. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 236-247). London: Sage Publications.
- Yin, R. (Ed.) (2005). *Introducing the world of education. A case study reader*. Thousand Oaks: Sage Publications.