Métodos Fundamentais e de Ensino

Matemática

PAULA **FRASSINETTI**
Escola Superior de Educação
QUALITY EDUCATION FOR ALL

Título:
Métodos Fundamentais e de Ensino – MATEMÁTICA

Autores:
Isabel Cláudia Nogueira
Daniela Mascarenhas
João Sampaio Maia
Rui Ramalho

Editor:
Escola Superior de Educação de Paula Frassinetti

Impressão:
KARTONTEK Graphic Solutions - Alvarães, Portugal

Tiragem:
500 exemplares

EDUCAÇÃO DE QUALIDADE PARA TODOS
Projeto financiado pelo Banco Mundial

Métodos Fundamentais e de Ensino

Matemática

Isabel Cláudia Nogueira

Daniela Mascarenhas

João Sampaio Maia

Rui Ramalho

ÍNDICE

Nota Introdutória

Elaborado no âmbito do projeto Educação de Qualidade para Todos, este documento é resultado da compilação de materiais de apoio à realização das atividades integradas no módulo **Métodos Fundamentais e de Ensino – Matemática**.

Estabelecendo como finalidades o desenvolvimento da análise crítica, da capacidade de inovação pedagógica e a reflexão sobre e para a prática, definiram-se três objetivos de aprendizagem para as 50 horas de formação desse módulo: reconhecer a importância da Didática da Matemática na aprendizagem e no ensino da Matemática, incorporar contributos teóricos e metodológicos da investigação na intervenção pedagógica em Matemática e delinear estratégias de ensino promotoras da aquisição de conceitos, procedimentos e técnicas matemáticas e das capacidades de resolução de problemas.

Assim, este texto integra:

- uma explicitação de diferentes tipos de tarefas matemáticas, definidas como determinantes para uma aprendizagem compreensiva e globalizante da Matemática;
- uma descrição detalhada sobre as possibilidades decorrentes da integração de resolução de problemas nos processos de ensino/aprendizagem da Matemática;
- uma identificação de estratégias de cálculo mental especialmente adequadas à exploração das quatro operações numéricas básicas;
- a caracterização de alguns recursos didáticos adequados às explorações matemáticas, acompanhada de exemplos da sua utilização em contextos de ensino básico;
- dois exemplos ilustrativos de possibilidades para planificação de aulas de Matemática que incorporem a utilização de recursos didáticos;
- um elenco diversificado de propostas de tarefas matemáticas que permitirão aprofundar e consolidar as aprendizagens previstas para o módulo de formação.

1. Tarefas matemáticas

> *"As tarefas são um elemento fundamental na caracterização de qualquer currículo, pois elas determinam em grande medida as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos. O modo de construção do conhecimento tem a ver com o papel que o aluno é chamado a desempenhar: procurar aprender o que lhe é apresentado de modo já sistematizado e organizado ou explorar e descobrir por si mesmo, apoiado pelo professor e em negociação com os colegas do grupo-turma*."
>
> João Pedro da Ponte, 2005

Para aprender Matemática é necessário compreender conceitos, estratégias e procedimentos e mobilizá-los para resolver uma diversidade de situações. Compreensão e aplicação da Matemática são, assim, duas vertentes indissociáveis à sua aprendizagem, que depende claramente das propostas de atividades apresentadas pelos responsáveis pelo seu ensino – os professores.
Quando os alunos estão envolvidos numa atividade, realizam tarefas. Mason e Johnston-Wilder referem-se a uma **tarefa matemática** como aquilo que os alunos são convidados a fazer durante uma aula; para Isabel Vale, Ana Barbosa e Teresa Pimentel (2014), uma **tarefa matemática** é tudo o que o professor utiliza no processo de ensino e aprendizagem da Matemática para envolver os alunos na resposta/resolução de uma situação que os conduz à aprendizagem.
Assim, uma **tarefa matemática** pode ser entendida como um instrumento facilitador da aprendizagem matemática do aluno.
Em contexto de sala de aula, uma tarefa pode surgir de diversas maneiras, em momentos distintos e com intencionalidades diferentes: uma tarefa pode ser formulada pelo professor e proposta ao aluno, pode surgir por iniciativa do próprio aluno e pode resultar até de uma negociação entre o professor e o aluno; determinada tarefa pode ser enunciada explicitamente logo no início da aula ou ir sendo constituída de modo implícito à medida que esta vai decorrendo; com uma determinada tarefa o professor pode pretender captar a atenção do aluno para determinado conceito e com outra tarefa pretender que este pratique certa técnica matemática.
Uma seleção adequada de boas tarefas implica, assim, necessariamente, assumir com clareza a sua intencionalidade. Um dos aspetos cruciais às práticas de ensino passa pela criação, seleção e até mesmo adaptação de tarefas que aliem intencionalidade pedagógica (do professor) e motivação (dos alunos).

1.1 **Classificando as tarefas matemáticas**

De acordo com Smith e Stein (2011), uma tarefa matemática é um segmento da atividade da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática específica. Para estas autoras, as tarefas têm uma duração definida e estão na base da aprendizagem dos alunos, exigindo que estes pensem concetualmente e que estejam motivados para fazerem conexões, o que, ao longo do tempo, irá conduzir ao desenvolvimento de ideias implícitas sobre a natureza da Matemática. Diferentes tarefas com diferentes níveis de exigência cognitiva induzem diferentes modos de aprendizagem da Matemática. Consequentemente, há tarefas de exigência cognitiva elevada ou reduzida consoante dão mais ou menos oportunidades aos alunos de se envolverem em processos complexos de pensamento: tarefas de nível elevado devem ser utilizadas em detrimento de tarefas de nível reduzido, pois estas implicam a realização de muitos passos semelhantes, tornando-se um trabalho rotineiro e habitualmente com um uso excessivo da memorização. Estas autoras referem ainda que fornecer aos alunos demasiado apoio ou orientação pode resultar num decréscimo da exigência cognitiva das tarefas, o que pode condicionar as aprendizagens que se produzem em sala de aula.

Assim, podemos ter:

- tarefas para aprender – as que o professor usa para ensinar um novo conceito ou capacidade;
- tarefas para rever – as que o professor usa para rever conceitos ou capacidades já adquiridos de modo a facilitar a aprendizagem de novos conceitos ou de outras capacidades;
- tarefas para praticar – as que o professor usa durante as aulas para clarificar um conceito ou demonstrar uma capacidade e que propõe que os alunos realizem, individualmente ou em grupos, durante o tempo de aula (ou mesmo fora dela);
- tarefas para avaliar – as que o professor usa para avaliar o desempenho dos alunos;
- ….

Eis alguns exemplos bem conhecidos de tarefas matemáticas: os problemas, os exercícios, os problemas, as tarefas de exploração, as investigações, os projetos e as tarefas de modelação.

1.2 **Graus de desafio e de estruturação das tarefas matemáticas**

Duas dimensões fundamentais das tarefas são o seu grau de desafio matemático e o seu grau de estruturação.
O grau de desafio de uma tarefa matemática relaciona-se de forma estreita com a perceção da dificuldade da situação apresentada e constitui uma dimensão desde há muito usada para graduar as questões que se propõem aos alunos, tanto na sala de aula como em momentos especiais de avaliação, como testes e exames. Esta dimensão varia, naturalmente, entre os polos de "desafio reduzido" e "desafio elevado".
O grau de estruturação de uma tarefa matemática é uma dimensão que só recentemente começou a merecer atenção, e varia entre os polos "aberto" e "fechado: uma tarefa fechada é aquela onde é clara e direta a informação (dados) fornecida, assim como explicitado o que é pedido; uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou até em ambas as coisas.
Cruzando estas duas dimensões, obtêm-se quatro quadrantes onde, de acordo com as suas propriedades, podemos situar os **exercícios**, os **problemas**, as **tarefas de exploração** e as **investigações**, como podemos observar na Figura 1.

Figura 1. Graus de desafio e de estruturação de tarefas matemáticas (Fonte: Ponte, 2005)

Um exercício é uma tarefa fechada e de desafio reduzido; um problema é uma tarefa também fechada, mas com elevado desafio; uma investigação tem um grau de desafio elevado, mas é uma tarefa aberta.

Os exercícios

Os exercícios servem para os alunos porem em prática os conhecimentos anteriormente adquiridos, tendo essencialmente como propósito a sua consolidação, de que são exemplo os seguintes:

> ***Exercício 1****. Calcula: a) 235 x 8.* *b) 124 : 6.*
>
> ***Exercício 2****. Quantos litros cabem num depósito que tem 1,47* m^3 *de volume?*
>
> ***Exercício 3****. Qual é a média do seguinte conjunto de números?*
> *12 15 11 12 14 13*

Os exercícios têm, por isso, um lugar próprio no ensino da Matemática, mas, como sublinhou José Sebastião e Silva[1], mais importante do que fazer muitos exercícios será fazer exercícios cuidadosamente escolhidos, que favoreçam a compreensão dos conceitos fundamentais por parte dos alunos. No entanto, para a maioria dos alunos, fazer exercícios em série não é uma atividade muito interessante, e reduzir o ensino da Matemática à resolução de exercícios comporta grandes riscos de empobrecimento nos desafios propostos e de desmotivação dos alunos para a disciplina.

Os problemas

Embora os problemas tenham um lugar bem estabelecido no ensino da Matemática desde a Antiguidade, foram os importantes trabalhos de George Pólya[2] que ajudaram a clarificar qual o seu possível papel educativo.
Para Pólya, o professor deve propor problemas aos seus alunos para que estes se possam sentir desafiados nas suas capacidades matemáticas e assim experimentar o gosto pela descoberta, condição fundamental para que os alunos possam perceber a verdadeira natureza da Matemática e desenvolver o seu gosto por esta disciplina. Estas ideias influenciam de forma marcante os currículos atuais, de tal modo que hoje em dia a resolução de problemas em Matemática constitui um traço fundamental das orientações curriculares de todos os níveis de ensino, desde a escolaridade básica ao ensino superior. Um problema deve comportar sempre um grau de dificuldade apreciável; no entanto, se for demasiado difícil, ele pode levar o aluno a desistir rapidamente (ou a nem sequer tentar solucioná-lo). Se o problema for demasiado acessível, não será então um problema, mas sim um exercício. Eis de seguida duas tarefas matemáticas formuladas como problemas:

> ***Problema 1.*** *O João levou para a escola um saco de rebuçados para dar aos amigos. Aos primeiros que encontrou deu metade dos rebuçados que trazia. Depois encontrou mais amigos e deu metade dos que ainda tinha. Quando chegou à sala dele já só tinha 20, um para cada colega. Quantos rebuçados tinha o saco antes de os distribuir?*
>
> ***Problema 2.*** *A Luísa tem duas saias, três calças e quatro t-shirts. Quantos toiletes diferentes consegue a Luísa fazer com essas peças de vestuário?*

[1] José Sebastião e Silva foi professor catedrático do Instituto Superior de Agronomia a partir de 1951, donde saiu após onze anos para ser regente das cadeiras de Mecânica e Astronomia na Faculdade de Ciências de Lisboa. Dirigiu durante mais de 20 anos o Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, onde contribuiu para a formação de muitos investigadores e docentes.
[2] George Polya, matemático húngaro, foi professor de Matemática em Zürich, entre 1914 e 1940, e na Universidade de Stanford, entre 1940 e 1953. Em 1945 publicou o livro *How to solve it* ?, que vendeu mais de 1 milhão de exemplares e foi traduzido para 17 idiomas.

As investigações

Centremo-nos agora num outro tipo de tarefas – as investigações –, a partir dos exemplos apresentados de seguida:

> ***Investigação 1.*** *Vai a três roças e verifica se existem diferentes tipos de pacotes de cacau. Se alguém estiver interessado em adquirir uma grande quantidade de cacau, qual a melhor opção de compra?*
>
> ***Investigação 2.*** *Para o pacote de 250 gramas, analisa os preços das diferentes roças. Qual é o preço médio? Que mais podes dizer acerca da distribuição dos preços? Quais podem ser as razões que levam umas roças a oferecer preços mais baixos e outras preços mais altos?*

Embora fornecendo informação e colocando questões, ambas as tarefas deixam ainda muito trabalho ao aluno para fazer, quer em termos de elaboração de uma estratégia de resolução, quer em termos da formulação específica das próprias questões a resolver.
A importância da realização de investigações matemáticas tem vindo a ser defendida por numerosos autores internacionais e de língua portuguesa[3]. Os argumentos principais utilizados para justificar a importância das investigações são análogos aos que são usados para justificar a importância dos problemas, acrescentando-se ainda que as investigações, mais do que os problemas, promovem mais envolvimento dos alunos, pois requerem a sua participação ativa desde a primeira fase do processo – a formulação das questões que se pretendem responder.
As tarefas de investigação, tal como os problemas e os exercícios anteriores, devem surgir de contextos da vida real ou pelo menos que sejam verosímeis. No entanto, também é possível formular problemas, exercícios e investigações em termos puramente matemáticos, e em que os alunos são capazes de se envolver com tanto ou mais entusiasmo do que nas tarefas que remetem para contextos reais.

As tarefas de exploração

Restam-nos ainda as tarefas relativamente abertas e reduzido desafio, que designaremos por tarefas de *exploração*. Na verdade, nem todas as tarefas abertas comportam um elevado grau de desafio: a diferença entre as tarefas de exploração e de investigação situa-se no grau de desafio – se os alunos puderem começar a trabalhar desde logo, sem muito planeamento, estaremos perante uma tarefa de exploração; caso contrário, será talvez melhor falar em tarefa de investigação.
Entre as tarefas de exploração e os exercícios a linha de demarcação nem sempre é muito nítida. Um mesmo enunciado, pode corresponder a uma tarefa de exploração ou a um exercício, conforme os conhecimentos prévios dos alunos. Consideremos a título de exemplo a seguinte questão:

Qual o valor médio da temperatura máxima da semana passada?

Se ela for colocada a alunos já aprenderam a determinar o valor médio de um conjunto de números, tratar-se-á de um simples exercício, mas caso os alunos ainda não tenham aprendido formalmente a calcular a média de um conjunto de valores, então será uma tarefa de natureza exploratória, em que os alunos têm de mobilizar os seus conhecimentos intuitivos para apresentarem propostas de solução.
Existe muitas vezes a ideia que os alunos não podem realizar uma tarefa se não tiverem sido ensinados diretamente a resolvê-la, o que nem sempre corresponde à verdade. Os alunos apren-

[3] John Mason, Paul Ernest, Paul Goldenberg, Paulo Abrantes, João Pedro da Ponte, Hélia Fonseca e Lina Brunheira, por exemplo, são alguns desses autores.

dem muitas coisas fora do contexto escolar que são capazes de mobilizar na aula de Matemática: é muitas vezes mais eficaz, em termos de aprendizagem, que eles descubram um método próprio para resolver uma questão do que apenas aprender o método do professor e sejam capazes de reconhecer, perante uma dada situação, como o aplicar.

1.3 **Duração das tarefas matemáticas**

Há duas outras dimensões das tarefas matemáticas que são de grande importância: a sua duração e o seu contexto.
No que se refere à duração, a realização de uma tarefa matemática pode requerer poucos minutos (frequente no caso dos exercícios) ou demorar dias, semanas ou meses. Ou seja, a duração pode ser curta ou longa, como se indica na Figura 2. Um exemplo de uma tarefa de longa duração é um projeto. As tarefas de longa duração podem ser mais ricas, permitindo aprendizagens profundas e interessantes, mas comportam um elevado risco dos alunos se dispersarem pelo caminho, entrarem num impasse altamente frustrante, perderem tempo com coisas irrelevantes ou mesmo de abandonarem totalmente a tarefa.

Curta duração ← Duração média → Longa duração

EXERCÍCIOS **PROBLEMA** **PROJETOS**
TAREFAS DE INVESTIGAÇÃO
TAREFAS DE EXPLORAÇÃO

Figura 2. Tipo e duração das tarefas matemáticas (Fonte: Ponte, 2005)

1.4 **Contexto das tarefas matemáticas**

Finalmente, o contexto constitui também uma dimensão a ter em consideração. Os polos aqui são as tarefas matemáticas enquadradas num contexto da realidade e as tarefas formuladas em termos puramente matemáticos; o autor Skovsmose (2000) distingue ainda um terceiro contexto de caráter intermédio que designa por 'semi-realidade', e que é muito frequente nos problemas e nos exercícios de Matemática. Embora aparentemente estejam em causa situações reais, para o aluno estas podem não significar grande coisa. Além disso, a maior parte das propriedades reais das situações não são tidas em conta. A atenção foca-se apenas na propriedade ou propriedades que interessam a quem enunciou o problema e é nelas que o aluno é suposto centrar-se. Por isso, para o aluno, acaba por ser um contexto quase tão abstrato como o contexto da Matemática pura.

As chamadas tarefas de modelação são, no fundo, tarefas que se apresentam num contexto de realidade. Estas tarefas revestem-se, de um modo geral, de natureza problemática e desafiante, constituindo problemas ou investigações, conforme o grau de estruturação do respetivo enunciado. Também é frequente falar-se em aplicações da Matemática. Conforme a sua natureza, trata-se, na maior parte dos casos, de exercícios ou problemas de aplicação de conceitos e ideias matemáticas. É de notar que os exercícios, os problemas e as investigações tanto podem surgir em contextos de realidade, como de semirrealidade ou de Matemática pura.

Realidade ← Semirrealidade → Matemática Pura

Figura 3. Contexto das tarefas matemáticas (Fonte: Ponte, 2005)

Os jogos

Outras tarefas igualmente importantes e com larga tradição no ensino da Matemática são os jogos. Um jogo, de alguma forma, constitui um problema: as regras estão bem definidas e o objetivo é vencer o jogo, seja este individual ou coletivo, com dois ou mais intervenientes; conseguir uma estratégia ganhadora pode constituir um problema de difícil resolução. Um jogo pode implicar igualmente um importante trabalho de recolha e organização de dados e, desse modo, assumir uma natureza exploratória.
Os alunos revelam especial apetência pelos jogos, pelo que, permitindo uma abordagem informal de conhecimentos matemáticos abstratos, um jogo pode ter importantes potencialidades para a aprendizagem da Matemática. Além disso, assinale-se que os jogos podem contribuir para que os alunos encarem o erro de uma forma mais positiva, permitem que os alunos se sintam confiantes no seu sucesso e favorecem a interação entre eles de uma forma natural.

2. As tarefas matemáticas na gestão curricular

Uma planificação detalhada do professor envolve usualmente vários momentos de trabalho, que deverão incluir várias tarefas. Mas … que tarefas matemáticas deve o professor propor na sala de aula? Sabemos que, por razões várias, na prática os exercícios têm tido um papel privilegiado, mas são insistentes as recomendações de associações profissionais ligadas ao ensino da Matemática para que essa situação não se mantenha. Uma das ideias que se tem vindo a afirmar é a necessidade de diversificação de tarefas matemáticas, uma vez que cada um dos tipos de tarefa desempenha um papel importante para alcançar determinados e distintos objetivos curriculares:

- As tarefas de natureza mais *fechada*, como os exercícios e os problemas, são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos, dado que este raciocínio se baseia na relação estreita e rigorosa entre dados e resultados;
- As tarefas de natureza mais *acessível*, como as tarefas de exploração e os próprios exercícios, possibilitam a todos os alunos um elevado grau de sucesso, contribuindo para o desenvolvimento da sua autoconfiança;
- As tarefas de natureza mais *desafiante,* tais como as de investigação e os problemas, são indispensáveis para que os alunos tenham uma efetiva experiência matemática;
- As tarefas de cunho mais *aberto* são essenciais para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas, etc.

A diversificação das tarefas a propor pode refletir ainda aspetos relacionados com os contextos e com a complexidade do trabalho a realizar pelos alunos, que, por sua vez, necessariamente se relaciona também com a sua duração:

- Para que os alunos se apercebam do modo como a Matemática é usada em muitos contextos e para tirar partido do seu conhecimento desses contextos é fundamental que lhes seja proposta a realização de tarefas enquadradas em contextos da realidade (caso das tarefas de aplicação e de modelação);
- No entanto, os alunos podem também sentir-se desafiados por tarefas formuladas em contextos matemáticos (em investigações, problemas ou explorações) e a sua realização permite-lhes perceber como se desenvolve a atividade matemática dos matemáticos profissionais;
- E, finalmente, pelas suas características muito próprias, as tarefas de longa duração, como os projetos, têm um papel insubstituível no desenvolvimento de diversos objetivos curriculares e devem ser, por isso, contemplados pelo menos na planificação anual do trabalho do professor.

Dosear estas características nas tarefas que propõe aos seus alunos deve ser uma das principais preocupações do professor. Outra preocupação é encontrar situações de aprendizagem de natureza exploratória que constituam bons pontos de partida para o estudo de novos assuntos, circunscrevendo desse modo a abordagem verbalista e expositiva tão ao gosto do ensino direto. Por outro lado, e segundo João Pedro da Ponte, o tipo de tarefas que se desenvolvem na sala de aula condiciona o envolvimento dos alunos e pode proporcionar momentos de maior ou menor interação e discussão. Os momentos de interação são fundamentais a um tipo de tarefas mais abertas, como nas tarefas de exploração e na resolução de problemas, no entanto, poderão ser importantes nos momentos em que se pretende colocar em comum ideias ou sistematizar conceitos em tarefas mais fechadas, como na resolução de exercícios.

O problema da seleção e articulação das tarefas não se esgota, no entanto, na sua diversificação. É preciso que as tarefas, no seu conjunto, proporcionem um percurso de aprendizagem coerente, que permita aos alunos a construção dos conceitos fundamentais em jogo, a compreensão dos procedimentos matemáticos, o domínio das notações e formas de representação relevantes, bem como das conexões dentro e fora da Matemática. É preciso fazer escolhas, estabelecer um percurso balizado por tarefas que permitam trabalhar de modo natural os diversos aspetos de conteúdos e de processos visados pelo professor.

3. A resolução de problemas na educação matemática

> *"Uma grande descoberta resolve um grande problema. Mas há sempre alguma descoberta na resolução de qualquer problema. Este pode até ser modesto, mas se desafiar a curiosidade e se puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver pelos seus próprios meios experimentará o prazer e o triunfo da descoberta."*
>
> George Pólya

Ainda que não tenha sido o primeiro a propor a introdução da resolução de problemas em contexto escolar, deve-se a George Pólya a abordagem consistente da resolução de problemas na sala de aula. Foi sobretudo na década de 80 do século passado que se assistiu ao reconhecimento unânime da sua importância no desenvolvimento curricular de Matemática, o que potenciou uma significativa produção pedagógica e investigativa centrada no ensino e na aprendizagem focada na resolução de problemas. Mas … o que entendemos por problema?

3.1 **O que é um problema?**

Lester define problema como uma situação em que um indivíduo ou um conjunto de indivíduos é chamado a executar uma tarefa para a qual não tem acesso a um algoritmo que determine completamente o método da sua resolução. Este autor coloca ênfase na vontade da sua resolução, afirmando que um problema só o é verdadeiramente se se pretender mesmo resolvê-lo: um problema não é apenas uma caraterística de uma tarefa matemática mas uma tarefa pode ou não ser um problema dependendo da relação que cada indivíduo estabelece com essa tarefa e do contexto específico em que acontece a sua resolução.

Para Kantowski, um problema é uma situação com que uma pessoa se depara e para a realização da qual não tem um procedimento ou algoritmo que conduza à solução. Para este autor, o que é um problema para um indivíduo poderá ser apenas um exercício para outro ou ainda uma frustração para um terceiro, ressalvando assim o conhecimento e a capacidade individuais como importantes na classificação de uma tarefa como problema.

Estamos perante um problema quando, segundo Pólya, se procura conscientemente alguma ação que seja adequada para atingir determinado objetivo que é claramente definido, mas não imediatamente atingível.

Mayer, por sua vez, afirma de forma sintética que estamos perante um problema quando não é óbvio o caminho que permite chegar a uma situação (final) a partir de uma outra (inicial).

Mais recentemente, Krulik e Rudnik afirmam que um problema é uma situação, quantitativa ou de outra natureza, com a qual se confronta um indivíduo ou grupo, na procura de uma solução, para a qual não tem prontamente resposta.

Apesar de distintas, nas várias propostas de definição acima apresentadas podem ser identificadas duas características comuns para problema - é uma situação que se pretende solucionar e não há um procedimento standard que conduza imediatamente à sua solução: consideraremos que um problema é matemático quando envolve o conhecimento e/ou aplicação de conceitos, representações, técnicas e algoritmos matemáticos para a sua resolução.

Num bom problema matemático deveremos reconhecer três características:

(i) ser desafiante e interessante a partir de uma perspetiva matemática;
(ii) ser adequado, permitindo relacionar o conhecimento que os alunos já têm de modo que o novo conhecimento e as capacidades de cada aluno possam ser adaptadas e aplicadas para completar tarefas;
(iii) ser problemático, a partir de algo que faz sentido e onde o caminho para a solução não está completamente claro.

3.2 **Porquê resolver problemas?**

Criar oportunidades de resolução de problemas significa criar um ambiente propício e favorável a aprendizagens com significado: de facto, em situação de resolução de problemas, os alunos têm possibilidades de verificar a validade e relacionar conceitos matemáticos, formular hipóteses e realizar conjeturas, aplicar procedimentos em contextos significativos, generalizar conclusões, adotando uma atitude reflexiva e desenvolvendo a sua capacidade de raciocínio e o seu pensamento matemático.
Sendo a resolução de problemas uma atividade que implica o recurso sistemático a capacidades de raciocínio e pensamento, é durante esse processo que o aluno tem possibilidade de as adquirir e desenvolver: quando os alunos recolhem dados de um problema, comparam-nos e procedem à sua análise; quando os alunos organizam a informação, estão a resumi-la, a classificá-la, a interpretá-la e a avaliá-la.
Estas capacidades e ainda outras, como ordenar, prever e inferir, por exemplo, são capacidades essenciais e estruturantes do pensamento, têm aplicação recorrente e são fundamentais na realização de atividades de elevada exigência.

3.3 **Tipos de problemas**

Existem várias propostas de classificação de problemas. Explicitaremos de seguida duas dessas possibilidades, a primeira proposta pelos autores Charles e Lester e a segunda elaborada por um grupo de investigadores portugueses.

3.3.1 **Tipologia proposta por Charles e Lester**

Estes dois autores apresentam as cinco seguintes categorias de problemas:

- **Problemas de um passo** – podem ser resolvidos pela aplicação direta de uma das quatro operações aritméticas básicas.

  Exemplo: Na sua papelaria, o Sr. João vendeu 60 caixas de lápis de cor, tendo realizado 240 euros nessas vendas. Por quanto vendeu ele cada caixa?

- **Problemas de dois ou mais passos** – podem ser resolvidos pela aplicação direta de duas ou mais das quatro operações aritméticas básicas.

  Exemplo: O Luís tinha 20 cromos. No seu aniversário, deu um quarto dos seus cromos ao Pedro e um terço dos restantes à Ana. Com quantos cromos ficou?

- **Problemas de processo** – só podem ser resolvidos através da utilização de uma ou mais estratégias de resolução; não utilizam processos mecanizados ou estandardizados.

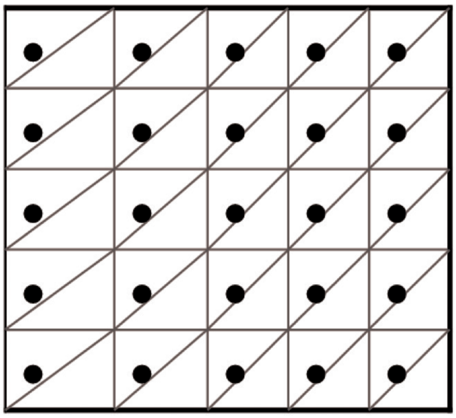
  Exemplo: No 1.º mês de aulas, a Joana brincava com quatro dos seus novos amigos. No 2.º mês, desse grupo já faziam parte cinco crianças. No mês seguinte, os seus companheiros de brincadeiras eram já sete e no 4.º mês esse número tinha subido para dez. Se continuar a fazer amigos a este ritmo, quantos serão os seus compinchas no 5.º mês de aulas?

- **Problemas de aplicação** – requerem a recolha de dados acerca da vida real e a tomada de decisões.

  Exemplo: A turma da Sara dispõe de 150 dobras para organizar a celebração do Dia da Criança. Apresente duas sugestões para essa celebração, sabendo que a turma tem 20 alunos.

- **Problemas tipo *puzzle*** - necessitam como que um “flash” para chegar à solução.

  Exemplo: Num geoplano, descubra qual a maior linha que se consegue representar, passando apenas por nove pontos.



3.3.2 **Tipologia proposta pelo Grupo de Investigação em Resolução de Problemas**

A categorização que agora se apresenta foi elaborada pelo GRIP, grupo constituído por Domingos Fernandes, António Borralho, Ana Leitão, Helena Fernandes, Isabel Cabrita, Lina Fonseca e Pedro Palhares:

- **Problemas de processo** – são problemas que normalmente não se resolvem pela aplicação direta de um algoritmo e dificilmente se resolvem sem a utilização de estratégias de resolução de problemas.

  Exemplo: Numa fábrica de refrigerantes há caixas de quatro latas e caixas de seis latas. Um cliente encomendou 114 latas em 24 caixas de ambos os tipos. Quantas caixas de seis latas fazem parte da encomenda?

- **Problemas de conteúdo** – estes problemas requerem a utilização de conteúdos programáticos, conceitos, definições e técnicas matemáticas.

  Exemplo: Determine as amplitudes dos ângulos de um triângulo sabendo que é um triângulo *isósceles e um dos seus* ângulos *internos tem 75º de amplitude*.

- **Problemas de aplicação** – utilizam dados da vida real, fornecidos ou a recolher, implicando por isso uma análise de informação e consequente tomada de decisões.

  Exemplo: Uma turma quer organizar uma visita ao Oceanário de Lisboa. Faça um levantamento do custo do passeio, tendo em conta despesas da viagem, alimentação, entrada no Oceanário.

- **Problemas de aparato experimental** – requerem a utilização/realização de experiências para serem solucionados.

  Exemplo: Construa os seguintes triângulos: triângulo 1 - comprimentos dos lados 4cm, 6cm e 9 cm; triângulo 2 - comprimentos dos lados 12cm, 14cm, 25cm. Efetue a soma das amplitudes dos ângulos internos de cada um. O que conclui?

3.4 **Que tipologia adotar?**

Nas seções anteriores apresentam-se duas possíveis classificações para os problemas, mas outras poderiam, e podem, ser adotadas. Porque não classificar os problemas partindo de outros critérios como o número de dados fornecidos – obtendo assim *problemas com dados a mais*, *problemas com dados insuficientes* e *problemas com dados necessários e suficientes*? Ou então classificar os problemas de acordo com o número de soluções que admitem – e existirem *problemas com solução única*, *problemas com mais do que uma solução e até problemas sem solução*? Dada a enorme variedade de problemas e atendendo à multiplicidade de critérios que podem ser estabelecidos para a sua classificação, porventura mais importante do que classificá-los será ter presente essa variedade e multiplicidade na seleção de problemas a apresentar aos alunos, pela inegável importância de que a sua resolução se reveste no desenvolvimento das suas capacidades de raciocínio lógico-matemático.

3.5 **Modelo de Pólya**

A resolução de problemas é concebida por diversos autores como um processo sequencial onde se estabelecem diversas fases.
Segundo Pólya, a resolução de problemas inclui quatro etapas:

> **Compreensão do problema** - procura-se compreender o problema até encontrar com precisão o desconhecido. Nesta etapa deve identificar-se o que é conhecido (os dados), o que é desconhecido (o objetivo) e as condições apresentadas.
> Os autores Krulik e Rudnik consideram muito importante dar aos alunos diversas oportunidades de leitura do problema: uma primeira leitura apenas permite uma familiarização dos alunos com o problema, sendo necessárias várias leituras para que os alunos o compreendam e sejam capazes de identificar os seus dados relevantes e o que se pretende solucionar.
>
> **Elaboração dum plano** - obtém-se um plano quando, de um modo geral, propomos os procedimentos ou estratégias a aplicar tendo em vista a obtenção da solução do problema: o produto desta etapa é, assim, o plano de trabalho a adotar para resolver o problema. Este plano deve identificar o(s) passo(s) a realizar e a(s) estratégia(s) a concretizar: veremos mais adiante algumas das estratégias que permitem resolver um conjunto muito significativo de problemas.
>
> **Execução do plano** – a partir do plano delineado, parte-se para a sua execução, seguindo o(s) passo(s) previamente definido(s) e incluído(s) no plano e aplicando a(s) estratégia(s) selecionada(s). Caso a execução do plano seja inconclusiva, isto é, não fornecer a solução para o problema, deverá regressar-se à fase de elaboração para definição de nova proposta.
>
> **Verificação dos resultados** – Nesta fase deve proceder-se a uma revisão crítica do trabalho realizado, incluindo o processo de raciocínio mobilizado, apurando se a solução obtida permite resolver a situação inicial.

Estas quatro etapas podem ajudar o aluno a organizar o seu processo de resolução de um dado problema. Ao longo das quatro etapas o aluno deverá colocar a si próprio uma série de questões que têm como objetivo organizar o seu pensamento de uma forma mais sistemática e eficaz.

3.6 **Estratégias de resolução de problemas**

Existem diferentes estratégias de resolução de problemas, também designadas como heurísticas. Para Shoenfeld,

> *uma heurística é (…) uma sugestão ou estratégia geral, independente de um tópico ou conteúdo específico que ajuda os resolvedores de problemas a abordar, compreender e/ou orientar, de uma forma eficaz, os seus recursos na resolução de problemas*.

Vejamos algumas dessas estratégias e exemplos de problemas onde a aplicação dessa estratégia pode ser adequada.

- **Utilizar um esquema / diagrama / tabela / gráfico**
  Muitas vezes fazer um esquema é uma forma de obter a solução de um problema. Por exemplo, o problema seguinte pode ser resolvido por um aluno no início da escolaridade básica através de um esquema.

A Rita é muito vaidosa. Para a passagem do ano e pensando que poderia utilizá--la com outras roupas, ela comprou uma saia vermelha e outra azul, uma camisola amarela, uma verde e outra preta. Depois pensou: Que bom! Agora já posso vestir-me de muitas maneiras diferentes.
De quantas maneiras diferentes se poderá vestir a Rita?

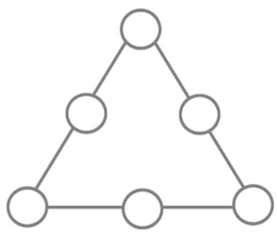
- **Trabalhar do fim para o princípio**
Esta estratégia é adequada quando se conhece o ponto de chegada e o que se quer saber é o ponto de partida. Pode ser aplicada, por exemplo, para resolver o seguinte problema:
No dia do seu aniversário, o João levou para a escola um saco de rebuçados para dar aos amigos. Aos primeiros que encontrou deu metade dos rebuçados que trazia. Depois encontrou mais amigos e deu-lhes metade dos que ainda tinha. E foi assim que chegou à sala dele apenas com 20 rebuçados no saco. Quantos rebuçados tinha o saco antes do João os ter dado aos amigos?

- **Simular / Simplificar o problema**
Neste caso procura -se resolver o problema simulando a situação recorrendo a objetos, criando um modelo ou fazendo uma dramatização, o que pode ser adequado no caso do seguinte problema:
O Mário tem as meias na gaveta todas desarrumadas. Ele sabe que tem duas meias castanhas, duas meias pretas e duas meias azuis. Na noite de Natal faltou a luz e ele teve de ir às escuras tirar meias para se calçar. Qual é o menor número de meias que deve tirar para ter a certeza que tira um par da mesma cor?

- **Descobrir uma regularidade / regra**
Nesta estratégia, procura-se encontrar a solução através da generalização de soluções específicas. São exemplos os problemas que têm subjacente uma sequência, como o seguinte:
Quantas partes se obtêm dobrando uma folha 8 vezes?

- **Organizar uma sequência de passos**
A organização de uma sequência organizada permite esgotar e visualizar todos os casos possíveis, como poderá ser mobilizado na seguinte proposta:
A Joana decidiu juntar contas para fazer um colar. Separou uma no primeiro dia e decidiu que em cada dia que passasse havia de lá colocar o dobro do dia anterior. Dez dias depois, quantas contas teve a Joana de juntar às que já tinha?

- **Tentativa e erro**
O problema é resolvido através de tentativas de um modo orientado e verificando em cada caso se a solução encontrada satisfaz as condições do problema. O problema seguinte pode ser resolvido por aplicação desta estratégia:
Em que círculos deverão ser colocados os 6 primeiros números naturais para que a soma dos números de cada lado do triângulo seja 9?



- **Procurar um problema análogo, mas mais simples**
  Formulando um problema mais simples, é possível resolver o problema mais facilmente e entender melhor o problema a resolver. É o que se poderá fazer para resolver o seguinte problema:

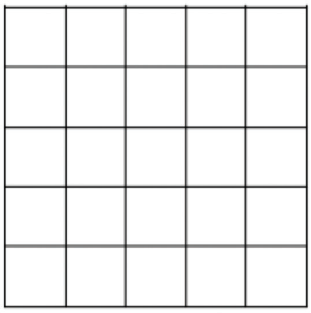
  Suponha que há um certo número de coelhos e de faisões numa gaiola, totalizando 7 cabeças e 22 patas. Quantos coelhos e faisões estão na gaiola?

- **Desdobrar um problema complexo em questões mais simples**
  Por vezes pode começar-se por um problema mais simples, como no caso seguinte:

  A Joana tem 3 saias – azul, preta e castanha, 4 camisas –branca, azul, vermelho e verde e 2 chapéus – um branco e outro azul. De quantos modos diferentes se pode apresentar a Joana com saia, camisa e chapéu?

- **Explorar casos particulares**
  Esta estratégia consiste em resolver um problema do mesmo tipo, mas que corresponda a um caso particular daquele que se quer resolver. É o que poderemos fazer no problema seguinte, começando por considerar inicialmente um quadrado de 2x2:

  Quantos quadrados existem na seguinte figura?

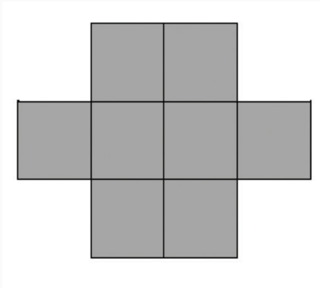


- **Criar um problema equivalente**
  Esta estratégia pode ser usada por exemplo quando temos um problema com números grandes, substituindo-os inicialmente por números menores, de modo a que se possa representar com mais facilidade. No exemplo seguinte, podemos aplicar esta estratégia começando por supor um número inferior de ginastas e ir evoluindo até obtermos a situação que é colocada no enunciado:

  Num campeonato de ginástica, as 5 ginastas de uma equipa tiveram que ficar unidas 2 a 2 com fitas coloridas. Quantas fitas são necessárias para realizar a atuação?

Propostas de atividades

1. No tabuleiro abaixo, coloque os números inteiros compreendidos entre 1 e 8 de forma que em nenhuma direção estejam números consecutivos.

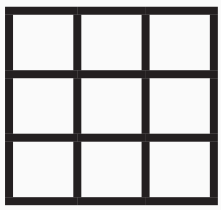


2. Num quadrado multimágico, o produto dos números de cada linha, de cada coluna ou na diagonal é sempre o mesmo. É o que acontece no seguinte quadrado:

1	**1**
1	**1**

2.1 Disponha num quadrado multimágico os divisores de 36.
2.2 Disponha num quadrado multimágico os números 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 e 100.

3. Quantos quadrados existem na figura abaixo?



4. Se dividíssemos um quadrado com 1 metro de lado em quadrados com 1 dm de lado, que comprimento obteríamos se colocássemos os quadrados pequenos todos em fila? E se o quadrado grande fosse dividido em quadradinhos de 1 cm de lado, que comprimento se obteria colocando esses quadradinhos todos em fila? E se os quadradinhos tivessem 1 mm de lado?

5. Leia atentamente as seguintes situações problemáticas e apresente uma proposta de resolução para cada uma, identificando a estratégia que aplicou.

   Situação problemática **1**
   O Wilson pensou num número, adicionou-lhe 3 unidades e ao dobro do resultado subtraiu 7 unidades, obtendo 15. Em que número pensou o Wilson?

   Situação problemática **2**
   O Jorge tem 33 anos e o seu filho 7. Daqui a quantos anos a idade do Jorge será o triplo da idade do seu filho?

   Situação problemática **3**
   A Mariana, a Célia, a Carolina e a Manuela decidiram organizar um torneio de ténis. Cada uma tinha de jogar uma só vez com todas as outras. Ficaram muito surpreendidas por o torneio levar tanto tempo a acabar. Quantos jogos serão jogados ao todo?

Situação problemática **4**
O Hugo tem um jogo de cubos de madeira. Tentou fazer com eles um quadrado grande e faltavam-lhe sete. Depois tentou fazer um quadrado mais pequeno e sobravam-lhe dez. Quantos cubos tem o jogo do Hugo?

Situação problemática **5**
A Luísa tinha um saco de berlindes. Depois de dar metade ao seu amigo Alberto, perdeu metade dos que lhe sobraram e ficou só com 6. Quantos berlindes tinha a Luísa no seu saco?

Situação problemática **6**
O José e o Rufino vivem em cidades diferentes que distam 480 km uma da outra. Partiram, cada um da sua cidade, às oito horas da manhã para se encontrarem na estrada que liga as duas cidades. O José vai de carro a uma velocidade média de 80 km por hora e o Rufino vai de bicicleta a 20 km por hora. Ao fim de quanto tempo se encontram os dois amigos?

Situação problemática **7**
Seis amigos querem saber qual deles tem mais força. Para isso, decidiram jogar ao braço de ferro e, como tal, todos têm de jogar entre si. Quantos jogos têm de se fazer?

Situação problemática **8**
O Carlos e a Luísa estão a resolver exercícios um pouco complicados para a disciplina de Física. O Carlos resolve um em cada 45 minutos, enquanto que a Luísa demora menos 5 minutos que o Carlos para resolver cada um.
Quando o Carlos resolver 8 exercícios, em que problema estará a Luísa?

Situação problemática **9**
A turma do João tem alunos muito curiosos e que gostam muito de charadas. Numa aula, a professora disse-lhes:
- Já repararam? Quando vocês estão sentados 2 a 2, um aluno fica sozinho; quando trabalhamos em grupos de 3, um grupo fica só com 2 alunos; quando formamos grupos de 4 ou 5 nas brincadeiras do recreio, sobram sempre 3 alunos.
Quantos alunos tem a turma do João?

Situação problemática **10**
O Sr. António tem galinhas e porcos. Quando contamos as cabeças dos animais obtemos 7 e quando contamos as patas obtemos 22.
Quantas galinhas e quantos porcos tem o Sr. João?

6. Utilize as seguintes informações para formular duas tarefas matemáticas distintas:

5 macacos, 4 zebras, 3 hipopótamos, 2 leões, 5 águias, 8 papagaios

4. Cálculo Mental

O trabalho com números é fundamental na vida quotidiana e a sua importância reflete-se nos currículos escolares de todo o mundo.
Existem propósitos de ensino comuns a todo o ensino básico que requerem uma mudança de práticas, como é o caso do desenvolvimento do sentido de número, da compreensão dos números e das operações e da capacidade de cálculo mental e escrito.
O cálculo mental ou cálculo numérico é referido nos currículos de Matemática há mais de 70 anos, mas o rápido avanço da tecnologia tem contribuído para a desvalorização de competências básicas de cálculo quando deveria ter acontecido o contrário, pois o desenvolvimento de estratégias pessoais de cálculo mental permite a consolidação do sentido de número e a melhoria da capacidade crítica e de estimação dos alunos.

4.1 **Cálculo mental - o que é?**

É um cálculo efetuado exclusivamente *de cabeça* ou é possível recorrer-se ao registo escrito, quando se efetua cálculo mental. Do nosso ponto de vista é errado limitar o cálculo mental a operações efetuadas *de cabeça*, uma vez que na realização de operações através dos algoritmos por cálculo escrito o cálculo mental também está presente.
Buys (2001) e Bourdenet (2007) defendem que o cálculo mental não se deve restringir ao operar *de cabeça*, mas que a utilização de papel e lápis para cálculos intermédios pode ser útil. O cálculo mental é importante porque desenvolve nos alunos qualidades de ordem lógica, de reflexão e de memória, contribuindo para a sua formação intelectual e fornecendo-lhes ferramentas para efetuarem cálculos simples sem recurso a ajuda escrita.
Em suma, o cálculo mental é o conjunto de saberes e processos mentais que o indivíduo mobiliza, objetiva e subjetivamente para: desenvolver estratégias pessoais de cálculo; reconhecer padrões, regularidades numéricas e relações matemáticas; compreender o nosso sistema de numeração decimal posicional; explorar as propriedades das operações com objetivos práticos e estimar resultados.
Desenvolver competências de cálculo mental não é tarefa fácil e requer intenção, método e persistência. Como objetivo primordial o cálculo mental visa melhorar a prática das quatro operações aritméticas, habituando a operar com números cada vez maiores com rapidez e segurança. Calcular mentalmente envolve procedimentos pessoais em que cada estratégia é pensada e utilizada tendo em conta os números com que se está a trabalhar e os conhecimentos que cada um possui.

4.2 **Estratégias de cálculo mental com números naturais**

O cálculo mental permite a utilização de estratégias pessoais, mas existe um conjunto de estratégias que devem ser ensinadas, discutidas e treinadas com os alunos. Sugerimos as seguintes estratégias de cálculo mental a utilizar com números naturais para as quatro operações básicas:

ADIÇÃO

Decompor/Compor quantidades

25 = 20 + 5 / 10+10+5 = 25

Adicionar com “iguais”

7+8 = 7+7+1 = 14 + 1 = 15

Calcular apoiando-se no 10

5 + 3+ 6 + 4+ 5 = 5+5+6+4+3 = 10+10+3 = 20+3 =23

Relacionar uma parcela com um n.º "redondo"

23 + 39 = 23 + 40 – 1 = 63 – 1 = 62

Decompor uma das parcelas e adicionar convenientemente

123+36 =123+30+6 =153+6 =159

Decompor as duas parcelas e aplicar convenientemente as propriedades

25+37 = 20+5+30+7 =20+30+5+7 = 50+12 = 62

Calcular somas iteradas

4+17+15+13 = (21+15)+13= 36+13 =49

Adicionar da esquerda para a direita (das centenas para as unidades)

200+230+180, como 200+200=400 e 400+100=500 e 30+80=110 logo 500+110=610

Descobrir o complemento de um número "redondo"

O complemento de 158 é 2, porque 158+2=160:
158 + 32 = 158 +2+ 30 = 160 + 30 = 190

Substituição de um número por um número "vizinho"

72+99 = 71+100
Adicionamos a quantidade que interessa a uma das parcelas e subtraímos na outra a mesma quantidade.

SUBTRAÇÃO

Subtrair dois números terminados em 0

Subtraem-se as dezenas e acrescenta-se um 0: 70–30 será 7–3=4, logo, 40.

Subtrair dois números inteiros quaisquer

87–73 = (87–70) – 3 = 17–3 =14

Decompor e compor quantidades

137-39 = 137–37- 2 = 100 -2 = 98 (39 = 37+2)

Subtrair da esquerda para a direita

752 - 351= 401

Descobrir o complemento de número "redondo"

185 – 79 = 185 – 80 + 1= 106

Substituição de um número por um número "vizinho"

75– 48 = 77–50 = 27
Substitui-se 48 por 50, adicionando 2 simultaneamente ao aditivo e ao subtrativo.

MULTIPLICAÇÃO

Multiplicar por 10, 100 ou por 1000

15 x 10 = 150; 3 x 100 = 300; 71x1000=71000

Multiplicar por um número de um algarismo

4 x 23 = (4x20) + (4x3) = 80 + 12 = 92

Utilizar a decomposição e composição aditiva, subtrativa e multiplicativa

35 x 27= 35 x (20+7) ou igual a 35x (30-3) ou ainda igual a 35x3x3x3

Multiplicação por números próximos das potências de 10 ou de outro número.

28 x 99 = 28 x (100-1) = 2800-28 = 2772

28 x 999=28 x (1000-1) = 28000-28 = 27972

DIVISÃO

Descobrir o múltiplo do divisor próximo do número

100:3= (100-1) : 3=33 sobra 1

Dividir decompondo o dividendo

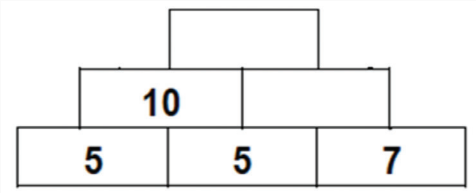
1299: 3 = (1200+90+9):3 = 1200:3 + 90:3 + 9:3 = 400+30+3 = 433

Dividir por 10, 100 ou por 1000

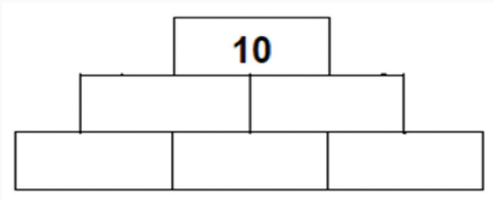
23000 : 10 = 2300; 23000 : 100 = 230; 23000 : 1000 = 23

Propostas de atividades

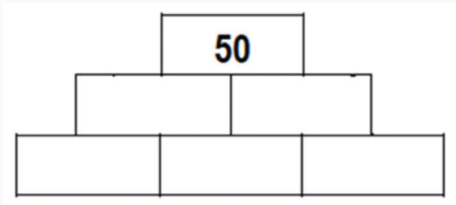
1. Desenhe uma pirâmide como a do exemplo abaixo. Peça aos alunos para escolherem 3 números pequenos e escreva-os nos 3 retângulos da base. Mostre como esta pirâmide é construída adicionando o valor de dois retângulos e colocando o resultado no retângulo suportado pelos mesmos.



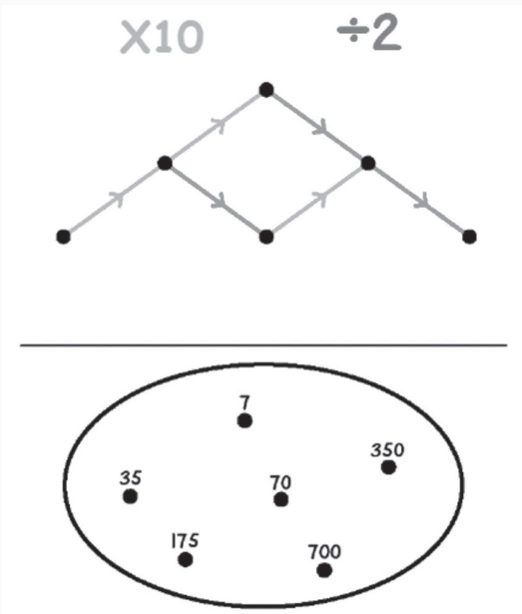
2. Escreva 10 no topo da pirâmide, deixando os outros espaços em branco e encoraje os alunos a jogar o “Construir Pirâmides” consigo, em que devem descobrir o maior número de soluções possíveis para que o valor do topo seja 10.



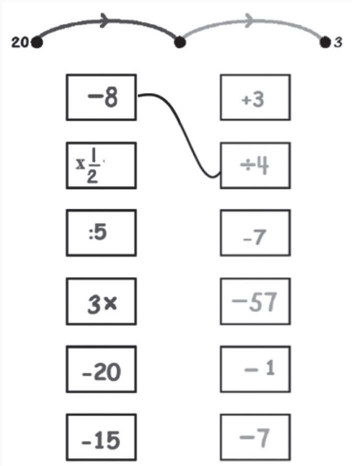
3. Com os alunos a trabalhar em pares, encoraje-os a jogar “Construir Pirâmides”. Agora aumente o grau de dificuldade colocando 50 no topo da pirâmide. Pode também aumentar o número de retângulos da base.



4. Coloque os números que estão no diagrama na figura de setas no lugar correto.

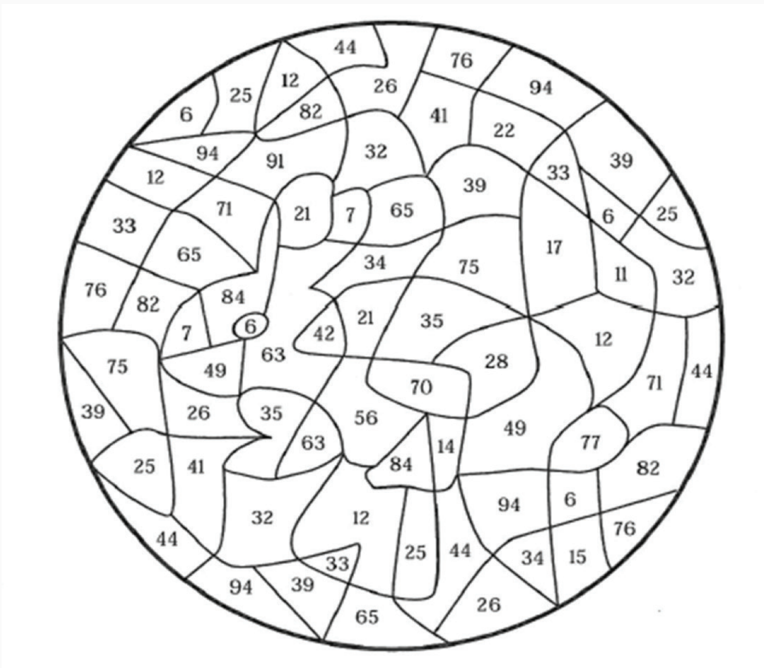


5. Ligue os pares de operadores que são solução desta figura de setas, como o exemplo.

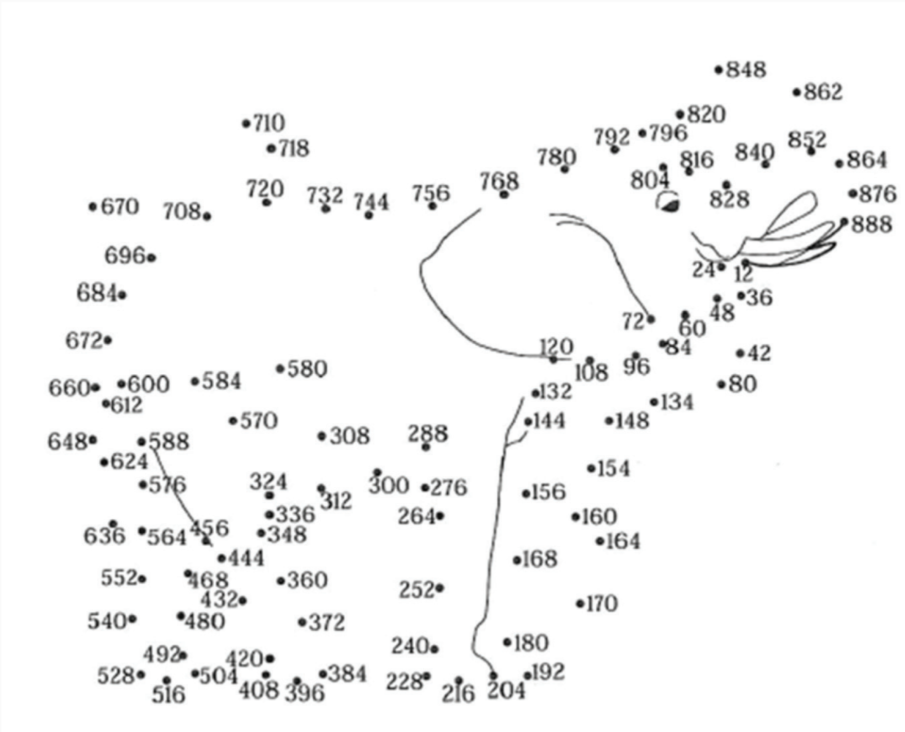


6. Calcule:
   a) 8 + 9 =? Estratégia - Formar pares de parcelas iguais.
   b) 38 + 6 =? Estratégia - Formar dezenas.
   c) 72 + 99 =? Estratégia - Observar se existem números vizinhos
   d) 132 + 45 =? Estratégia - Decompor e associar convenientemente as parcelas
   e) 13+11+7+9 =? Estratégia - Usar um "número redondo".
   f) 600 x 700 =? Estratégia - Produtos de múltiplos de 10.
   g) 129 : 3 = ? Estratégia - Dividir, decompondo o dividendo.

7. No desenho abaixo, pinte as regiões onde se encontram números múltiplos de 7:



8. Na figura seguinte, una os pontos que são múltiplos de 12 por ordem crescente.



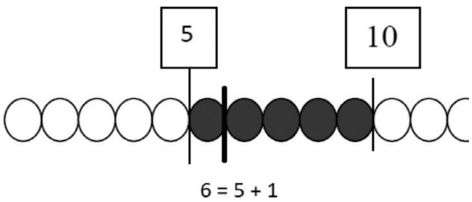
5. Recursos manipuláveis para a aprendizagem da Matemática

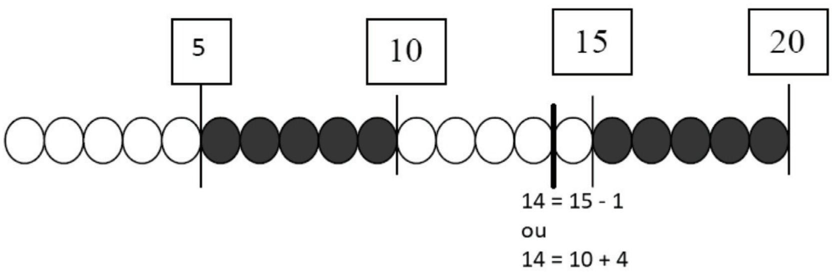
5.1 **Colar de contas**

O **colar de contas** consiste no enfiamento de contas, em forma linear, tal como se pode ver nas imagens em baixo. Pode ser organizado usando duas cores para fazer agrupamentos. Os agrupamentos mais utilizados no pré-escolar e no 1º ano de escolaridade são de 2 em 2, 5 em 5 ou de 10 em 10, de acordo com os objetivos que o professor pretenda trabalhar. De qualquer modo, é de salientar que 2 e 5 são divisores de 10, pelo que o trabalho com esses colares de contas auxilia a aprendizagem do sistema de numeração decimal.

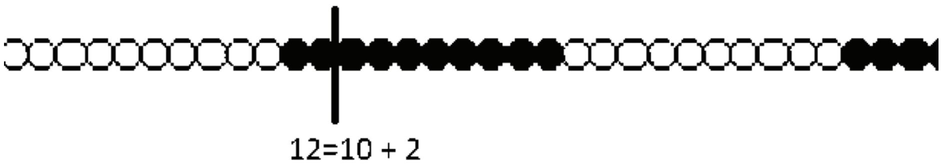
Neste documento iremos abordar mais detalhadamente os colares de contas de 5 em 5 e de 10 em 10. Propõe-se que os alunos comecem a realizar as tarefas recorrendo à manipulação deste material, podendo usar molas, para, no mesmo colar, representar números diferentes, e gradualmente, promover a passagem do concreto para a representação em suporte de papel.
O colar de contas é um material de apoio à contagem estruturada e ao cálculo, e, simultaneamente, permite desenvolver o estabelecimento de relações numéricas, pelo que potencia o desenvolvimento do sentido de número. Por exemplo:

<u>Colar de 5 em 5</u>





<u>Colar de 10 em 10</u>



A alternância de cores também facilita a estratégia de contar a partir de um número pois, por exemplo, num colar de contas de 5 em 5, numa situação aditiva de juntar 5 com 3, os alunos podem partir do 5, sabendo que o grupo de uma dada cor corresponde a 5 contas, e recorrendo a correspondência um a um, juntar mais 3 contas.

Enquadramento programático

Este material pode ser trabalhado em contexto pré-escolar (4/5 anos) e no 1º ano de escolaridade. Permite introduzir, desenvolver e/ou consolidar diversos conteúdos relacionados com o domínio dos Números e Operações, nomeadamente na introdução ao sistema de numeração de base 10, correspondência um a um entre elementos de dois conjuntos, classificação e ordenação, noção de número natural, contagens progressivas e regressivas, decomposição de números naturais, comparação e ordenação de números, adições e subtrações por cálculo mental e métodos informais e relação entre a adição e subtração, por exemplo.

Propostas de atividades[4]

Para o colar de contas de 5 em 5

1. Construir um colar (enfiamento) de 20 contas, com contas de duas cores. Usar alternadamente 5 contas de cada cor.

2. Partir em duas partes um agrupamento de 5 de todas as formas possíveis. Explicitar as decomposições do agrupamento obtidas.

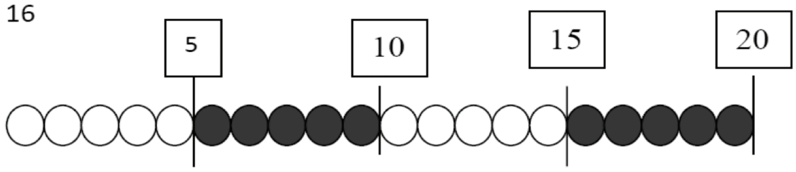
3. Contar 10 contas e verificar quantos agrupamentos de 5 existem no número 10.

4. Contar 15 contas e verificar quantos agrupamentos de 5 existem no número 15.

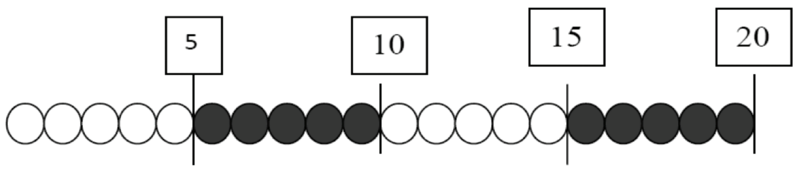
5. Contar 20 contas e verificar quantos agrupamentos de 5 existem no número 20.

6. Marcar os seguintes números no colar, explicitando o raciocínio usado na sua identificação e assinalando-o no modelo do colar de contas.

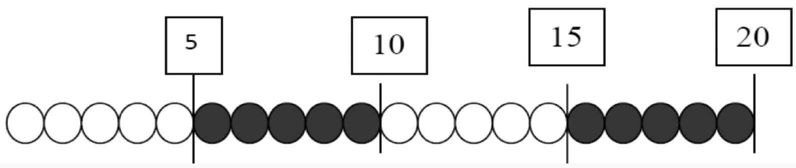
a) 6, 11, 16



b) 4, 9, 14, 19



c) 7, 12, 17



7. No modelo do colar assinalar o número 5.
   Se juntar mais 6 vai marcar o número ______. Fazer o registo.
   Se acrescentar 12 vai obter-se o número ______. Fazer o registo.

8. No modelo do colar assinalar o número 15.
   Se andar 4 para trás vai marcar o número _____. Fazer o registo.
   Se andar 14 para trás vai obter-se o número ____. Fazer o registo.

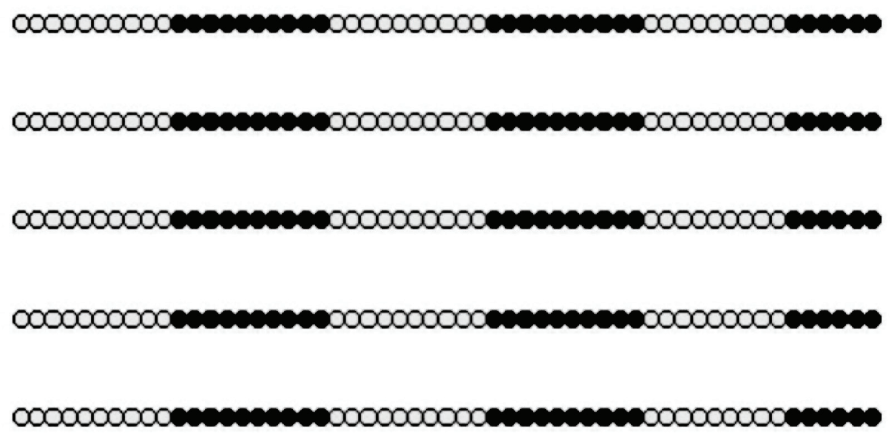
Para o colar de contas de 10 em 10

9. Construir um colar (enfiamento) de 100 contas, com contas de duas cores. Usar alternadamente 10 contas de cada cor.

[4] Atividades adaptadas do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1º e 2º ciclos -2009/10 e 2010/11- “Viajar na Matemática” da Escola Superior de Educação do Politécnico do Porto

10. Como é que podemos contar de 20 a 60? Como é que podemos contar de 70 a 40?

11. Representar no colar de contas os números 12, 23, 34, 49 e 55.



12. Como podemos encontrar 37 + 26 recorrendo ao colar de contas?

    Questões orientadoras: Onde está o ponto de partida? Como se marca 37? Como é que se vai adicionar 26? Como poderíamos marcar o 26 sem contar as 26 contas?

    Nota: Em sala de aula, e à medida que os alunos comunicam oralmente a sua solução, o professor deve registar no quadro as etapas feitas.

13. Como podemos calcular 52-49? Qual a forma mais fácil?

    Nota: É desejável que se conclua que o comparar/completar é o método mais eficiente para este problema.

14. Como descobrir o número que falta em 55 + ___ = 74?

    Questões orientadoras: Onde está o 55? Onde está o 74? Quantas contas é preciso adicionar a 55 para obter 74?

    Nota: É desejável que se conclua que a forma mais fácil de resolver o problema é localizar os dois números e determinar a diferença entre eles.

15. Resolva as seguintes operações com auxílio do colar de contas

37 +26 =　　48 +21 =　　24 +39 =　　99-17 =　　75-26 =

52-49 =　　54 + __ = 78　　28 + __ = 76　　25 + __ = 100

5.2 **Moldura do 10**

A **moldura do 10** é composta por um retângulo de papel (na posição vertical ou horizontal) de duas filas por 5 colunas, dividido em 10 quadrados, ou seja, 5 na primeira fila e 5 na segunda e comporta, ainda, fichas, pintas, tampas ou círculos de papel que são, posteriormente, colocados nos quadrados da moldura.

A **moldura do 10** é um modelo combinado de apoio à contagem e ao cálculo. Facilitadora da identificação de padrões, permite desenvolver o sentido de número e o reconhecimento visual dos números, bem como a construção da compreensão do valor posicional e promove o estabelecimento de relações numéricas. Para além disso, dependendo da forma como o professor pretenda trabalhar, pode permitir desenvolver o reconhecimento de quantidades sem contagem (*subitizing*).

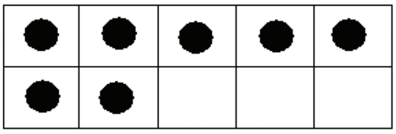
A exploração deste material também permite o desenvolvimento de capacidades a nível da adição, subtração, multiplicação e divisão, incluindo o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental.

Podemos recorrer a duas disposições para a colocação dos círculos em papel:

- <u>Disposição Linear</u>

A moldura pode seguir uma disposição linear, onde os círculos começam a ser colocados na primeira fila, da esquerda para a direita. Nesta disposição, enfatiza-se a estrutura do 5 e o 10 surge como 5 mais 5 ou o dobro de 5.

Nesta disposição o 7, por exemplo, é visto como 5 mais 2 ou 10 menos 3:

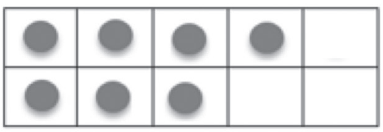


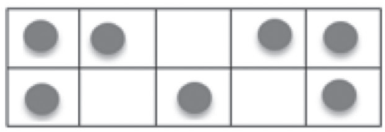
- <u>Disposição Partitária</u>

Nesta disposição, os círculos são colocados, quer na primeira fila quer na segunda, com o intuito de se trabalhar reconhecimento de padrões.

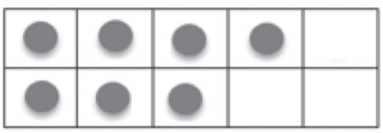
Nesta disposição o 7, por exemplo, pode ser visto como

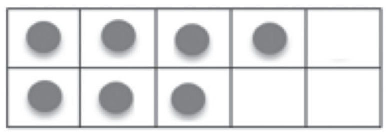
2 mais 2 mais 2 mais 1 ou 3 mais 1 mais 3 ou





3 mais 3 mais 1 ou 4 mais 4 menos 1





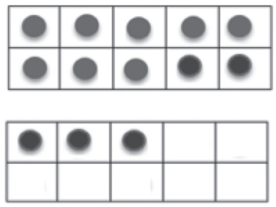
Este material pode ser explorado de duas formas distintas:

- com o retângulo totalmente preenchido com círculos, e em que os alunos retiram os círculos em excesso na moldura para representar o número em causa,
- com o retângulo vazio, onde os alunos colocam os círculos para representar o número pretendido.

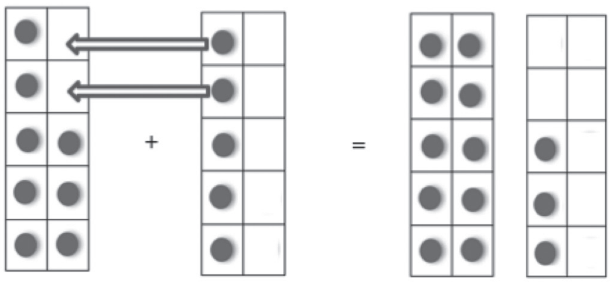
Neste documento, optaremos por recorrer às molduras do 10 vazias.

Na mesma moldura pode recorrer-se à representação de mais de um número, por exemplo para se promover o trabalho com a operação adição: para tal pode recorrer-se a círculos de cores diferentes para se distinguirem as parcelas em causa. Passa-se para outro retângulo, quando um já está totalmente preenchido. Há outra hipótese: os alunos representam as parcelas em molduras diferentes e, posteriormente, pegam em círculos da segunda parcela e completam a primeira moldura, onde estava representado a primeira parcela.

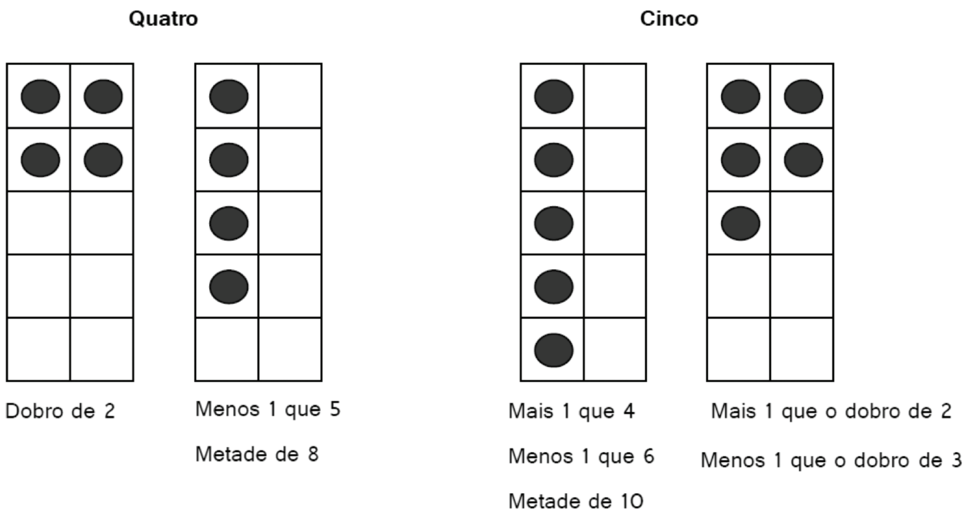
Exemplos:
8 + 5 = ?



Ou



Outros exemplos:



Enquadramento Programático

Este material pode ser trabalhado em contexto pré-escolar (4/5 anos) e no 1º ano de escolaridade. Permite introduzir, desenvolver e/ou consolidar diversos conteúdos relacionados com os domínios dos Números e Operações – introdução ao sistema de numeração de base 10, correspondência um a um entre elementos de dois conjuntos, relações numéricas, ordenação, noção de número natural, contagens progressivas e regressivas, decomposição de números naturais, adições e subtrações por cálculo mental e métodos informais, relação entre a adição e subtração e nas operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão – e da Geometria e Medida, na orientação e visualização espacial.

Propostas de atividades

1. Selecionar um número e representá-no na moldura do 10. Explorar as diferentes possibilidades.

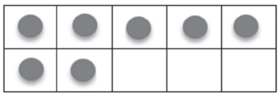
2. A partir do número indicado no item anterior, encontrar outros números, por exemplo, tirando 4 ou acrescentando 2.

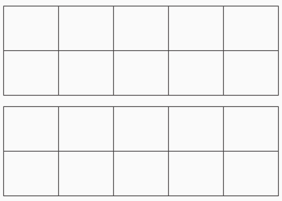
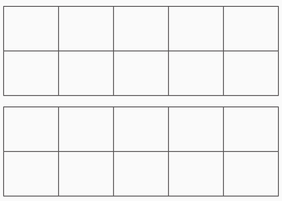
3. Usando uma moldura, representar o número 8 de diferentes formas. Explorar as diferentes representações e registá-las.

4. Representar o número 17 de diferentes formas. Explorar as diferentes representações e registá-las.

5. Resolver as seguintes operações recorrendo às molduras do 10:
   a) 8 + 4
   b) 18 – 10
   c) 17 + 5
   d) 17 - 8

6. Completar as seguintes tabelas recorrendo ao número de círculos que se desejar, mas de modo a cumprir o número de molduras presente na tabela:

Moldura	Número de ● na moldura	Quantos ● faltam para 10?	___ + ___ = 10	10 - ___ = ___
	7	3	7 + 3 = 10	10 – 7 = 3 ou 10 – 3 =7
				
				
				

Molduras	Número de ● na moldura	Quantos ● faltam para 20?	___ + ___ = 20	20 - ___ = ___
				
				

5.3 **Ábaco**

Julga-se que os ábacos terão sido inventados na Mesopotâmia no ano 3000 A.C.
Há vários tipos de ábacos. Na Europa Ocidental os mais usados são o vertical ou horizontal.
O **ábaco** é um antigo instrumento de cálculo, usado em muitas culturas e que, hoje em dia, é utilizado para facilitar a aprendizagem do sistema de numeração decimal no Ensino Básico.
É formado por uma moldura com hastes ou arames paralelos, dispostos no sentido vertical ou horizontal, correspondentes cada um a uma posição digital (mais usualmente unidades, dezenas, centenas...) e nos quais estão os elementos de contagem (fichas, argolas, contas, ...) que podem fazer-se deslizar livremente. O ábaco emprega um processo de cálculo com sistema decimal, atribuindo a cada haste uma potência de 10.

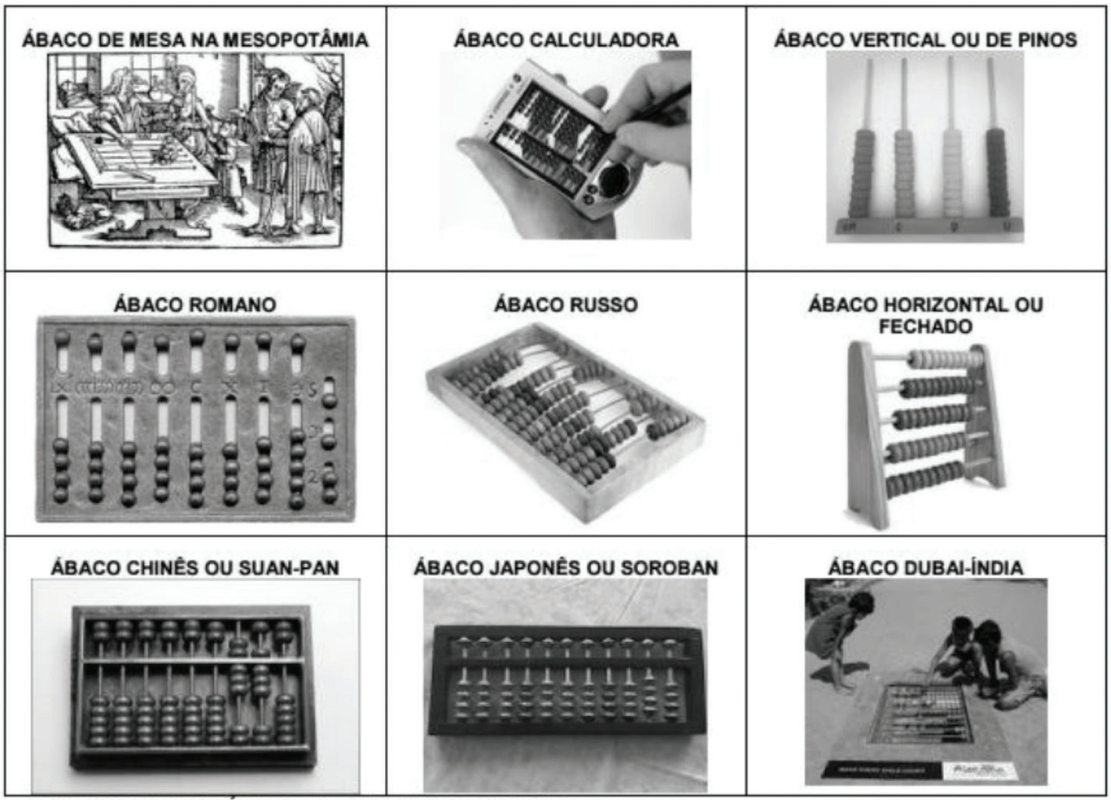


Figura 4. Tipos de Ábaco, produto da humanidade.
(Fonte: Seleção de imagens retiradas do Google Imagens, 2014)

Este instrumento continua a ser muito utilizado nos primeiros anos do ensino básico, pois auxilia os alunos a representar os números de forma rápida, como também a realizar cálculos de forma mais segura. Facilita também a compreensão das propriedades e caraterísticas do nosso sistema de numeração. Uma das principais regras da utilização deste material é o facto de não podermos colocar dez argolas na mesma haste. Como o valor de cada argola respeita a regra da escrita numérica, este material acaba por ser de fácil compreensão.
Alguns autores defendem que o ábaco foi, provavelmente, a primeira máquina de calcular inventada pelo homem. Este material permite efetuar as quatro operações fundamentais da matemática: adição, subtração, divisão e multiplicação, uma vez que cada barra representa os elementos da contagem, sendo a sua posição igual à da contagem: unidades, dezenas, centenas, …

<u>Ábaco Vertical</u>

Num ábaco vertical, encontram-se varetas ou hastes dispostas verticalmente onde se colocam as contas ou argolas necessárias para representar um número. A vareta mais à direita representa as unidades e cada vareta seguinte a unidade da ordem seguinte.

Para representar números, a haste mais à direita representa a ordem das unidades, a segunda da direita representa a ordem das dezenas, a terceira haste representa a ordem das centenas, etc. e cada haste pode ter zero a nove contas representando os algarismos 0 a 9.
Podemos representar qualquer número utilizando o ábaco, basta aumentar a quantidade de hastes conforme o necessário, elevando, assim, a quantidade de ordens.

Para efetuar cálculos, colocamos as contas correspondentes a cada número e substituímos 10 contas numa haste por uma conta na haste seguinte, conforme as regras do sistema de numeração decimal.
Cada haste deve, pois, poder comportar, pelo menos, 19 contas, para que numa adição, se possa fazer o transporte e numa subtração o empréstimo de uma dezena (por exemplo), mas mantendo sempre a regra de que cada casa (haste) só pode ficar com o máximo de 9 contas: isto obriga a fazer o transporte para a haste da esquerda.
As duas figuras seguintes mostram como usar o ábaco numa adição com transporte (17 + 15) e numa subtração com empréstimo (217 – 35).

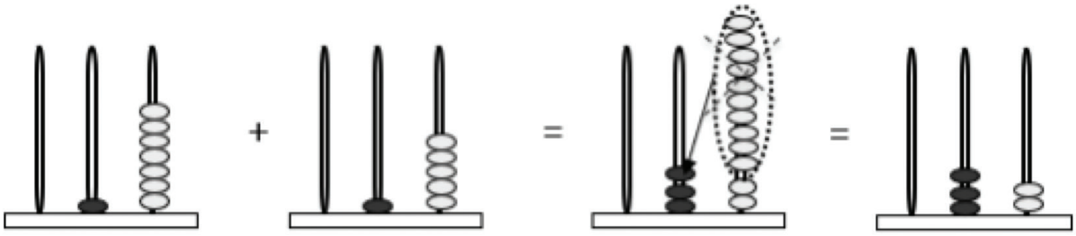


Figura 5. Adição com transporte com recurso ao ábaco

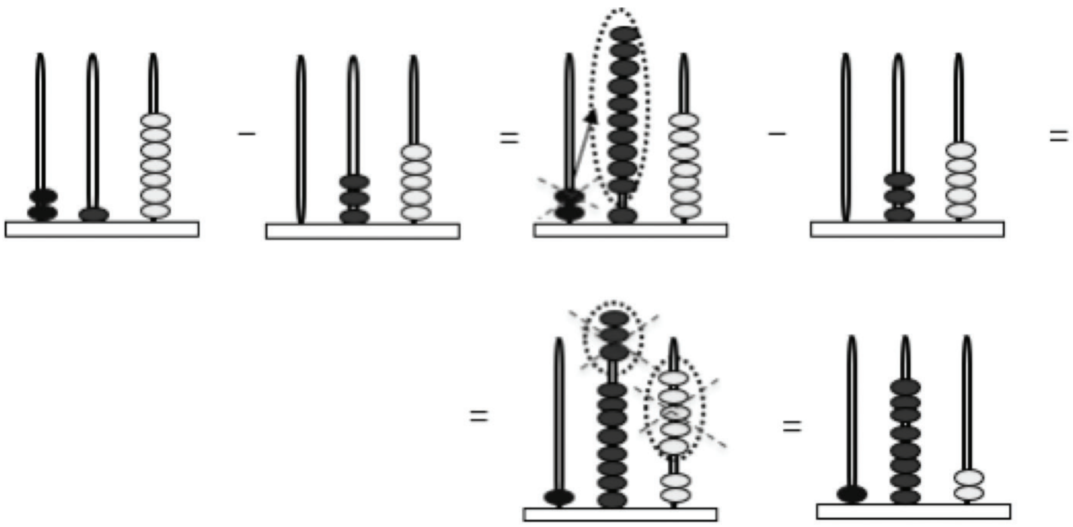
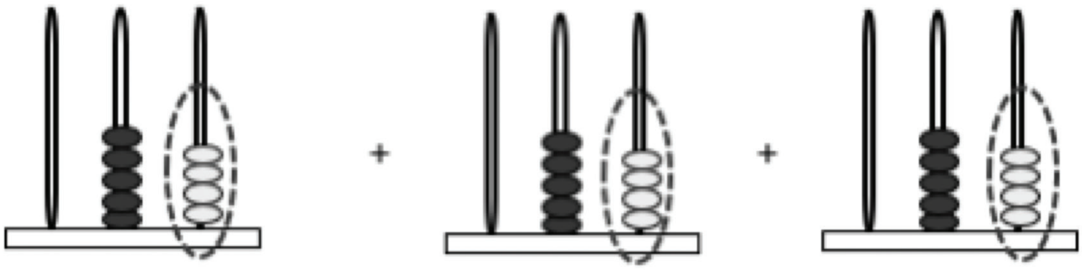
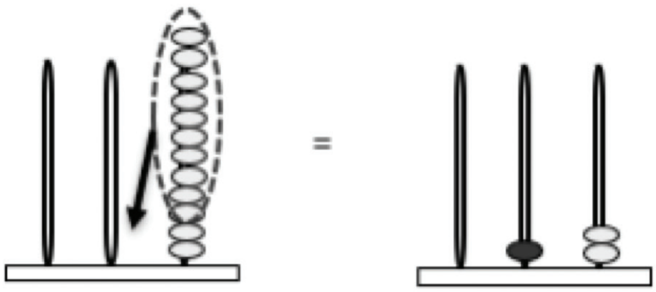


Figura 6. Subtração com empréstimo com recurso ao ábaco

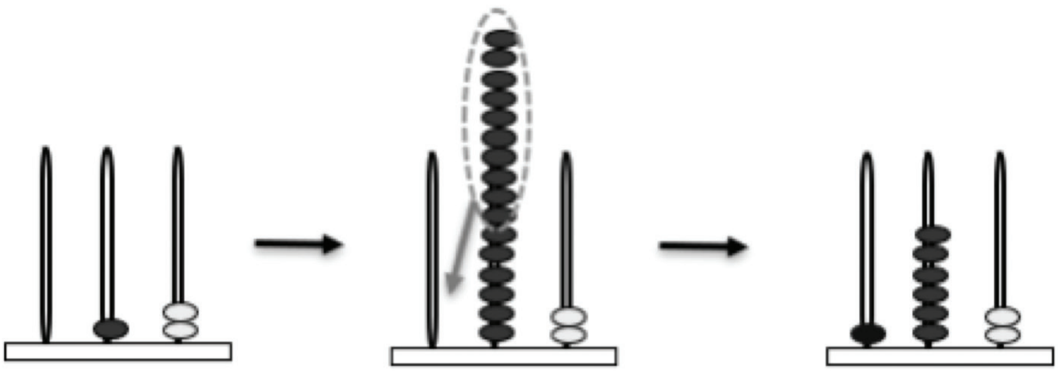
As duas figuras seguintes mostram como usar o ábaco numa multiplicação e numa divisão. É de referir que estas duas operações podem ser realizadas no ábaco, mas o multiplicador e o dividendo não podem ser números de ordem elevada. Relativamente à multiplicação, por exemplo 54 x 3 , relembre-se que 54 x 3 é o mesmo que 54 + 54 + 54.



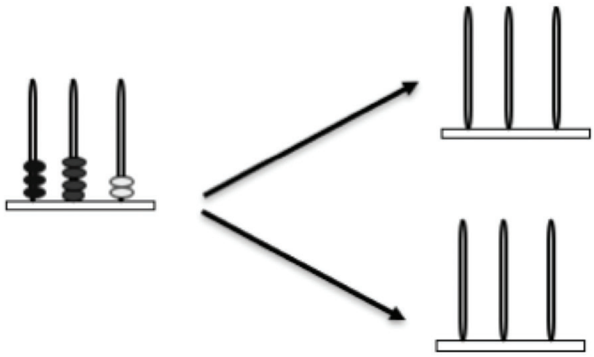
Começamos por operar pela ordem mais baixa, tal como no algoritmo da multiplicação. Assim, temos 4 + 4 + 4 = 12 unidades. Mas 12 unidades é o mesmo que 1 dezena e 2 unidades, pelo que colocamos uma conta na haste das dezenas e 2 contas na haste das unidades.



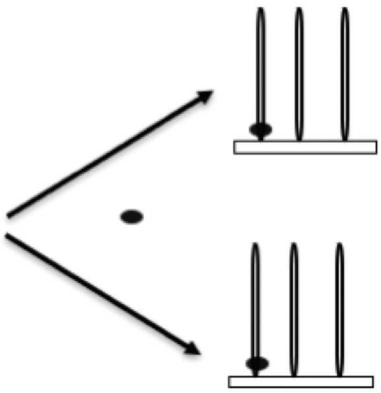
Façamos, agora, a adição das dezenas: 5 + 5 + 5= 15 dezenas, o que equivale a 10 dezenas, isto é, 1 centena e 5 dezenas. Deste modo, acrescentamos no ábaco anterior uma conta nas centenas e 5 nas dezenas, obtendo assim o número 162.



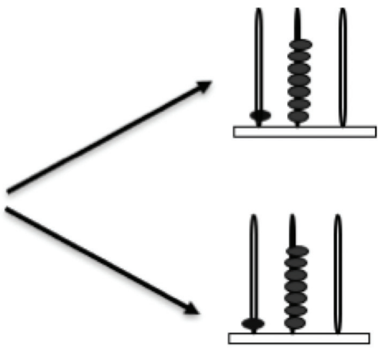
Vejamos agora a operação de divisão, a partir do exemplo 342:2. Começamos por representar 342 no ábaco. De seguida pretende-se distribuir, de igual modo, essa quantidade por dois ábacos.



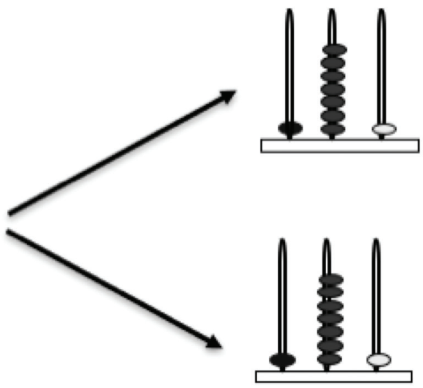
1º passo: É de referir que o algoritmo da divisão tem início pela ordem mais elevada do dividendo, pelo que o primeiro passo desta divisão é distribuir, de igual modo, as 3 centenas por dois ábacos. Colocaremos 1 centena em cada ábaco e sobra 1 centena que é o mesmo que 10 dezenas.



2º passo: Vamos agora distribuir as dezenas. Temos 4 dezenas mais 1 centena (conta azul anterior que sobrou), ou seja, temos que distribuir 14 dezenas por dois ábacos, o que corresponderá a 7 contas em cada ábaco na haste das dezenas.



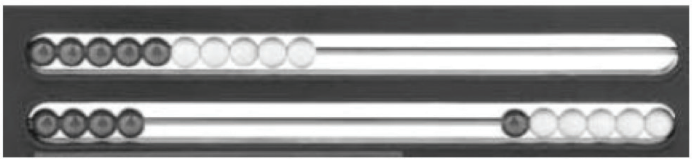
3º passo: Falta agora distribuir as 2 unidades, o que corresponde a colocar uma unidade em cada ábaco.



Assim, 342: 2 tem quociente 171 e o resto é zero (repare-se que não ficam contas por distribuir).

Ábaco Horizontal Russo

É formado por duas hastes laterais onde se apoia um número variável de filas. Em cada uma das filas estão 10 contas. Na maioria dos ábacos horizontais, essas 10 contas contemplam 5 de cada cor. Esta organização privilegia a estruturação dos números usando 5 e 10 como números de referência.
A pessoa que vai usar este ábaco terá que ter todas as contas à sua direita: movem-se para a esquerda as contas necessárias para representar os números desejados.
Por exemplo, no ábaco horizontal em baixo está representado o número 14, pois na primeira vareta há 5 mais 5 contas e na segunda há 4 contas ou 5 menos 1 conta, perfazendo 14 contas, ou seja, 14 unidades.



É de referir que neste tipo de ábaco, os grupos de 10 contas estão sempre visíveis e explícitos na vareta, pelo que este ábaco não é de posição, como é o caso do ábaco vertical em que há troca de 10 unidades de uma ordem por uma conta na ordem seguinte. No entanto, o ábaco horizontal também apresenta vantagens relativamente ao ábaco vertical, pois potencia a evolução de estratégias de cálculo, passando, por exemplo, da adição de 10 em 10 para a multiplicação, e auxilia os alunos a trabalhar, partindo de números de referência, atendendo ao uso de cores diferentes de contas, trabalhar de 5 em 5 ou de 10 em 10, o que pode facilitar o cálculo.

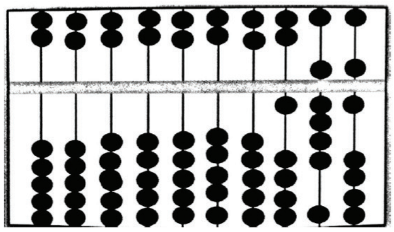
Outros ábacos horizontais

Há outros ábacos horizontais conhecidos e ainda, nas civilizações em causa, muito utilizados: Ábaco Chinês Suan- pan, Ábaco Japonês Soroban.
Estes ábacos apresentam em cada haste 5 contas mais 2 contas separadas por uma barra horizontal, cada conta das cinco tem valor 1 unidade e cada conta das 2 que estão na parte superior da barra horizontal, tem o valor de 5 unidades. As contas da parte de cima deslocam-se de cima para baixo, as contas que se encontram abaixo da barra separadora, deslocam-se de baixo para cima.

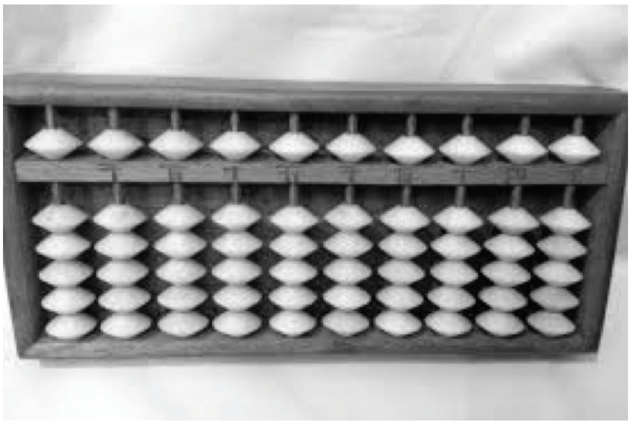
Por exemplo:

Que número está representado no suan-pan ao lado?

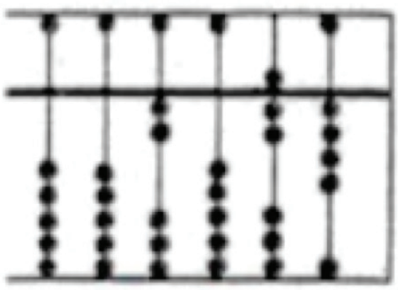
196



Ábaco Japonês **Soroban**



Nos ábacos japoneses cada haste tem 5 contas mais 1 conta, separadas por uma barra horizontal, em que se usa também uma base 10 com base 5 auxiliar. A representação de números nestes ábacos é muito semelhante à dos ábacos chineses. No soroban seguinte, por exemplo, está representado o número 2074.



Na maioria das salas de aula do ensino básico, até porque o nosso sistema de numeração de base 10 é posicional, usa-se o ábaco vertical.

Enquadramento Programático

Este é um material muito útil para a aprendizagem do sistema de numeração decimal, para o desenvolvimento do sentido de número e para a aprendizagem e desenvolvimento do cálculo.
Este material permite introduzir, desenvolver e/ou consolidar diversos conteúdos relacionados com o domínio dos Números e Operações, nomeadamente: introdução ao sistema de numeração de base 10; contagem; representação, comparação e ordenação de números naturais e de números racionais não negativos, representados na forma decimal; decomposição de números naturais; decomposição de números racionais não negativos, representados na forma decimal; operações aritméticas, nos algoritmos da adição e da subtração.

Propostas de atividades

1. Representar no ábaco os seguintes números: 15, 159, 1024 e 8450.

2. Com auxílio do ábaco efetuar as seguintes operações:

   141 + 82; 64 – 23; 1024 + 156; 111-24; 54 x 3; 213 x 2; 6482:2; 472:3.

3. Representar no ábaco o número 1426.
   a) Qual é o algarismo das unidades, das dezenas e das centenas?
   b) Quantas centenas tem o referido número?

4. Suponha que dispõe de 3 contas e de um ábaco. Quantos números se podem representar nestas condições? Identifique-os.

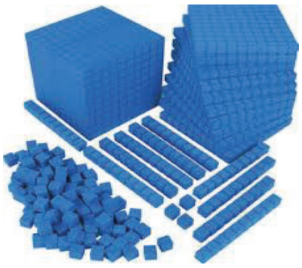
5. A Ana e a Maria são duas amigas que estavam a representar diferentes números nos seus ábacos. Ao lado podemos ver uma dessas representações. Quando a Ana observou os dois ábacos disse à Maria que o número que tinha representado era maior porque utilizou mais contas. A Ana tem razão? Justifique.

6. Resolver o seguinte problema recorrendo ao ábaco:

   O Timóteo tinha 10,46 euros no seu porta-moedas. Com esse dinheiro, comprou um bilhete para assistir a um espetáculo que custou 5,5 euros. Do dinheiro que sobrou, deu metade à sua irmã Dulcineia. Quanto dinheiro recebeu a Dulcineia?

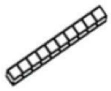
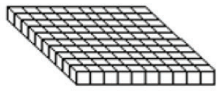
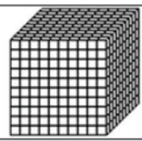
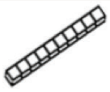
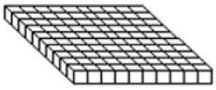
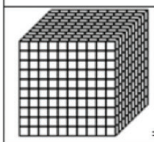
5.4 **MAB (Multibase Arithmetic Blocks)**

Este material manipulável é formado por quatro tipos de peças: cubo grande, placas, barras e cubinhos.



É de referir que cada:
- cubinho (cubo com 1 cm de aresta) representa uma unidade;
- barra é constituída por 10 cubinhos;
- placa é constituída por 10 barras, ou seja, 100 cubinhos;
- cubo (grande) é constituído por 10 placas, ou seja, 100 barras, isto é, 1000 cubinhos.

Como podemos verificar, este material facilita a introdução do nosso sistema de numeração decimal. É de referir que podemos mudar a unidade. Neste sentido, observe-se a seguinte tabela:

Unidade				
 =1	1	10	100	1000
 = 1	0,1	1	10	100
 =1	0,01	0,1	1	10
 =1	0,001	0,001	0,1	1

Ao mudarmos a unidade para qualquer peça que constitui o MAB, podemos trabalhar com números representados na forma decimal, até à ordem das milésimas.
Assim, este material permite que o sistema de numeração se desenvolva gradualmente nos alunos, de forma diferente de sujeito para sujeito, integrando a compreensão do valor posicional dos algarismos e da sua estrutura multiplicativa (por exemplo, formamos 1 dezena com um conjunto de 10 unidades, formamos 1 centena com um conjunto de 10 dezenas, etc.).

Enquadramento Programático

Este material permite introduzir, desenvolver e/ou consolidar diversos conteúdos relacionados com os domínios dos Números e Operações - introdução ao sistema de numeração de base 10, contagem, decomposição de números, comparação e ordenação de números inteiros não negativos, algoritmos das operações aritméticas, comparação e ordenação de números racionais não negativos representados na forma decimal – e da Geometria e Medida, nos conceitos de área, perímetro e volume.

Propostas de atividades

1. Sabendo que a aresta de um cubinho tem 1cm de comprimento, represente com o MAB:
   a) Dois retângulos de área $400cm^2$ e de perímetros diferentes.
   b) Um hexágono de área $25cm^2$.
   c) Um decágono de área $10cm^2$.
   d) Dois polígonos com o mesmo perímetro e áreas diferentes.

2. Qual é o volume do cubo grande, sabendo que a barra representa a unidade de volume?

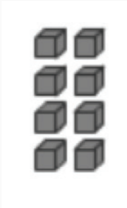
3. Sabendo que a aresta de um cubinho tem 1cm de comprimento, construa:
   a) Um cubo com $27cm^3$ de volume.
   b) Um prisma com $330cm^3$ de volume.

4. Represente o número 25 com o menor número de peças do MAB. É possível representar este número com 18 peças?

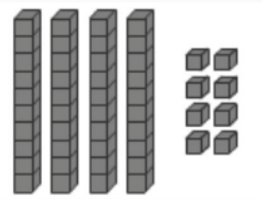
5. Com as peças do MAB represente o número 137 de diferentes modos.

6. Se o cubinho for a unidade, diga que número está representado em cada alínea:

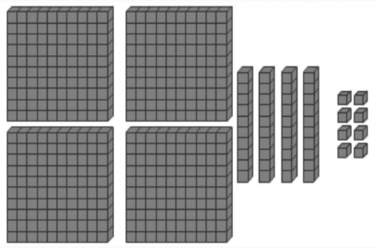
a)



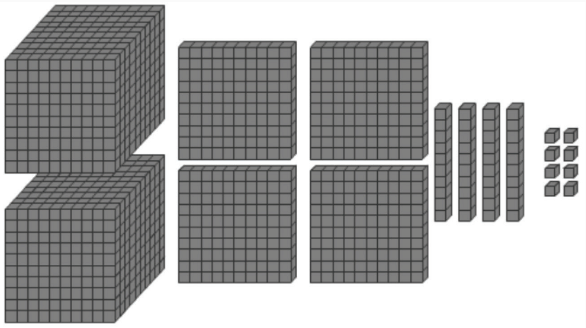
b)



c)



d)



7. Se a barra for a unidade, que números estão representados em cada alínea da questão anterior?

8. Se a placa for a unidade, que números estão representados em cada alínea da questão 6?

9. Se o cubo for a unidade, que números estão representados em cada alínea da questão 6?

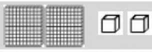
10. Recorrendo à modelação com o material MAB, coloque por ordem crescente os seguintes números: 102; 12; 201; 2011; 21.

11. Recorrendo à modelação com o material MAB, preencha os espaços em branco com os símbolos >, < ou = :

2,03 ____ 2,3	1,2 ____ 1,20	5,67 ____ 5,6
12,3 ____ 1,23	3,45 ____ 3,54	0,2 ____ 2
5 ____ 0,05	2,21 ____ 2,3	9,06 ____ 9,6

Nota: para cada alínea, deve indicar a unidade utilizada.

12. Complete a seguinte tabela:

Numeral decimal	Decomposição	Representação padrão
164	100 + 60 + 4	
	200 + 50 + 3	
		
530		

13. Como utilizaria o material MAB para ilustrar os seguintes algoritmos?

a) Adição

230	3802	65,38	345,6
+ 47	+ 499	+ 15,80	+ 54,8

b) Subtração

256	1604	32,68	20,4
- 34	- 732	- 11,56	- 16,37

c) Multiplicação

306 x 2   102 x 5   34 x 6   45,6 x 10

d) Divisão

126 : 3   10,46 : 4

14. Resolva as seguintes expressões numéricas, modelando-as com o MAB:

a) 11,5 – (0,6 + 0,5) =

b) (0,8 + 3,02) – 0,75 =

c) 2,98 + (0,3 – 0,175) – 0,3

5.5 **Réguas de Napier**

As **réguas de Napier**[5] são nove, cada uma correspondendo a um dos números de 1 a 9 (por vezes, surge uma décima régua, toda constituída por zeros, mas esta é dispensável para a realização dos cálculos). Para além destas réguas, existe uma de referência que indica a linha de forma a facilitar a leitura. Cada régua é constituída por 9 quadrados justapostos divididos pela diagonal, e contém uma linha (ou coluna) da tabuada da multiplicação, como mostra a figura seguinte:

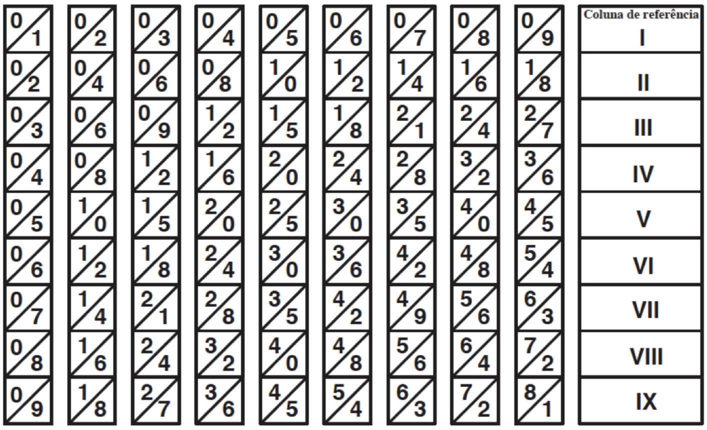
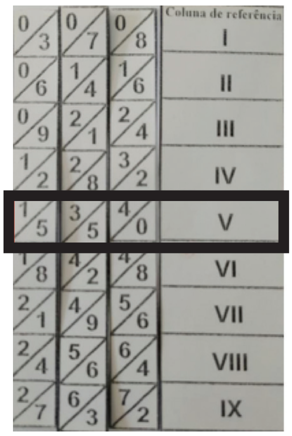


Figura 7. Réguas de Napier

Enquadramento Programático

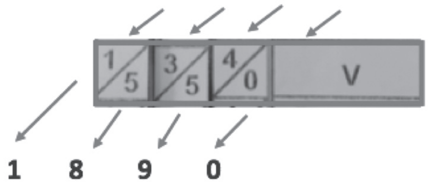
Este material permite introduzir, desenvolver e/ou consolidar os seguintes conteúdos relacionados com o domínio dos Números e Operações: atividades de contagem, decomposição de números e operações aritméticas de multiplicação e divisão.
Vejamos de seguida alguns exemplos da sua utilização

Exemplo 1 – 378 x 5
As barras dos algarismos do multiplicando 3, 7 e 8 são colocadas uma ao lado da outra, na mesma ordem que formam o número 378. Queremos fazer a multiplicação deste número por 5, então vamos à linha 5: temos em cada barra o 5º múltiplo, ou seja, 5 vezes o algarismo que a encabeça. Observe a linha 5 das barras a seguir,



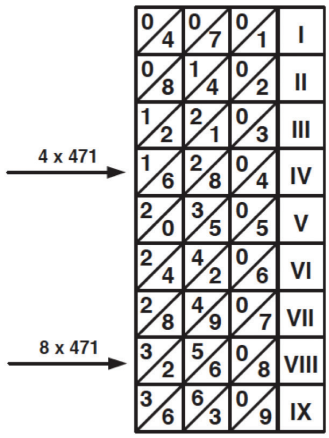
[5] John Napier nasceu em Edimburgo, Escócia, em 1550, e morreu nessa mesma cidade em 1617, aos 67 anos de idade. Desde pequeno Napier mostrava-se diferente dos demais jovens da sua classe social e, em 1563, ingressou na Universidade de Saint Andrews. Estudou Teologia, viajou pela Europa e estudou na Universidade de Paris, na Itália e na Holanda. Napier estudava Matemática como um simples passatempo, argumentando que tinha pouco tempo para dedicar-se plenamente a esta disciplina, já que as questões políticas e religiosas consumiam muitas horas. Passou para a história como um célebre matemático pela invenção dos logaritmos e por várias contribuições em diferentes ramos da matemática (geometria, trigonometria e álgebra).

A soma em diagonal dos dígitos da linha assinalada é o resultado de **378 x 5.**



O produto de 378 por 5 é 1890.

Exemplo 2 – 84 x 471
Colocam-se lado a lado as réguas 4, 7 e 1, e ainda a régua de referência



A soma em diagonal dos dígitos da primeira linha assinalada é o resultado de **4 x 471.**
A soma em diagonal dos dígitos da segunda linha assinalada é o resultado de **8 x 471.**

Como 84 x 471 = 80 x 471 + 4 x 471, por aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, tem-se que:

$$\begin{array}{r} 3\,7\,6\,8\,0 \\ +\quad 1\,8\,8\,4 \\ \hline 3\,9\,5\,6\,4 \end{array}$$

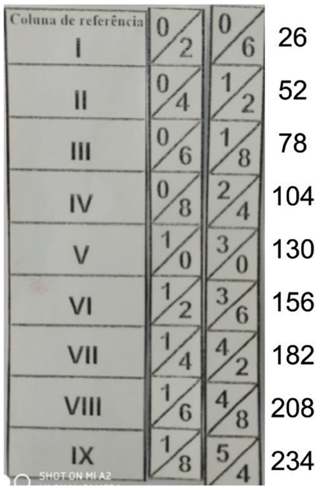
é o resultado do produto.

Podemos observar que as parcelas obtidas no cálculo com as réguas de Napier, não são mais que os produtos parciais presentes no habitual algoritmo da multiplicação:

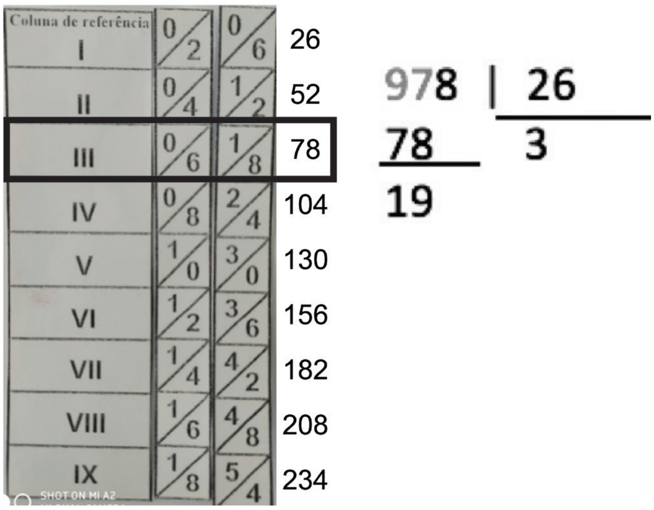
$$\begin{array}{rl} 4\,7\,1 & \\ \times\quad 8\,4 & \\ \hline 1\,8\,8\,4 & \longleftarrow \\ +\,3\,7\,6\,8 & \longleftarrow \\ \hline 3\,9\,5\,6\,4 & \end{array}$$

Exemplo 3 – 978:26

Primeiro colocamos as barras 2 e 6 do divisor uma ao lado da outra, formando o número 26, à direita da barra indicadora das linhas. A seguir somamos em diagonal cada linha e anotamos o resultado à direita das linhas correspondentes.

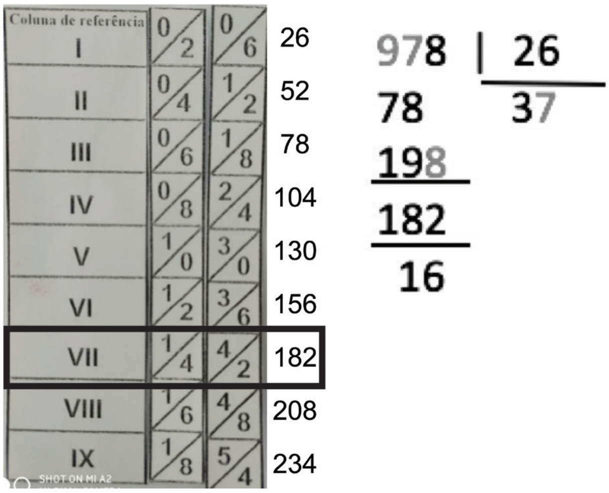


A seguir nos resultados, procuramos o maior número que não ultrapasse 97 (dezenas), localizamos o número 78 na linha 3 referente ao 3º múltiplo. Repare-se que na linha seguinte a soma em causa é maior que 97 dezenas, pelo que ficamos com o resultado da 3ª linha. O número 3 será o primeiro algarismo do quociente, ou seja, da solução procurada.



Agora fazemos a subtração 97 – 78 = 19 e anotamos o resto 19 em baixo da linha. Em seguida baixamos o próximo algarismo do dividendo, o 8 colocando-o à direita no resto 19, tal como fazemos na realização do algoritmo tradicional da divisão. O novo dividendo parcial é 198. Repetimos o mesmo processo, olhamos para os resultados parciais ao lado direito das barras e procuramos um número que não ultrapasse 198, localizamos o número 182 na linha 7 referente ao 7º múltiplo. O número 7 será o segundo algarismo do quociente.

Fazemos então a subtração de 198 – 182 = 19 e anotamos o resto 19 em baixo da linha.



Como não há mais números no dividendo, terminamos a divisão inteira. O resultado da divisão solicitada é 37 e o resto é 19.

5.6 **Blocos Padrão**

Este material manipulável é formado por seis tipos de formas geométricas com cinco cores diferentes:

- Triângulos equiláteros verdes;
- Trapézios isósceles vermelhos;
- Quadrados laranjas;
- Hexágonos regulares amarelos;
- Losangos beges;
- Losangos azuis.

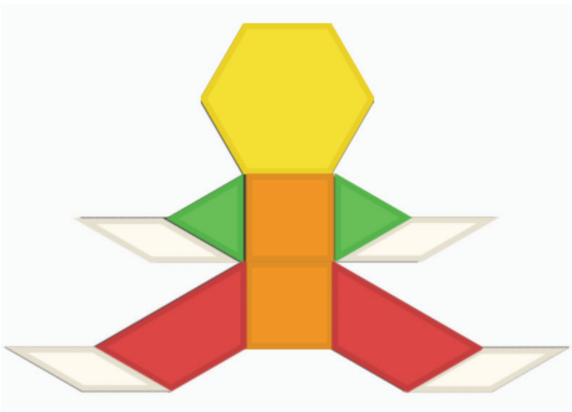
A medida do comprimento de todos os lados destas figuras geométricas é igual, com exceção da base maior do trapézio isósceles (vermelho) que tem o dobro do comprimento da base menor e esta, por sua vez, tem a mesma medida que os outros lados das restantes figuras geométricas.

Enquadramento Programático

Os Blocos Padrão podem ser utilizados a partir do jardim de infância. Este material permite introduzir, desenvolver ou consolidar diversos conteúdos relacionados com os domínios da Geometria e Medida – isometrias e simetrias, pavimentações, construção de figuras, classificação de polígonos, ângulos, perímetros e áreas, padrões e sequências – e dos Números e Operações, números inteiros não negativos e números racionais não negativos.

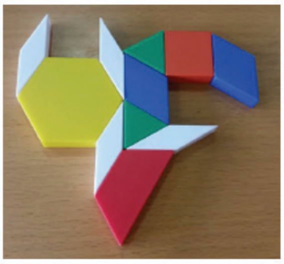
Exemplos de atividades

Usando as peças dos blocos padrão, reproduzir figuras.



Usando as peças dos blocos padrão, construir polígonos côncavos e polígonos convexos.

Polígono Côncavo



Polígono Convexo

Comparar a área de cada peça com a área de outras peças dos blocos padrão, completando a tabela.

Peças				
				
				
				
				

Identificar as isometrias presentes numa construção.

Determinar perímetros e áreas com números inteiros não negativos:
Calcular a medida da área e do perímetro da seguinte figura, considerando que o triângulo corresponde a 1 unidade de área e a medida de um lado desta peça corresponde a 1 unidade de comprimento.

P = 20 u.c. e A = 18 u.a.

Comparar frações.

$$\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \frac{3}{8}$$

A parte sombreada a roxo representa 1 parte das 4 que compõem a unidade.

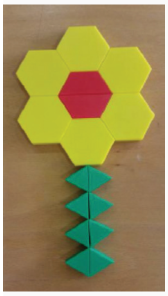
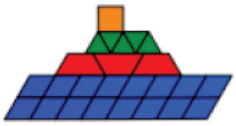
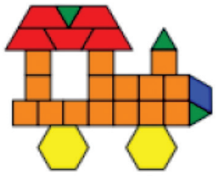
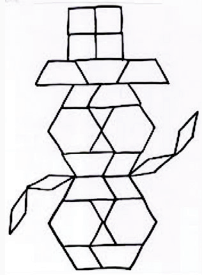
A parte sombreada a cinza representa 3 partes das 8 que compõem a unidade.

Por comparação das partes sombreadas, ou seja, das áreas representadas, verifica-se que $\frac{1}{4} < \frac{3}{8}$.

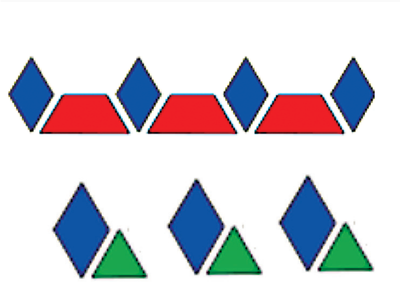
Propostas de atividades

1. Faça construções livres que se assemelhem a animais.

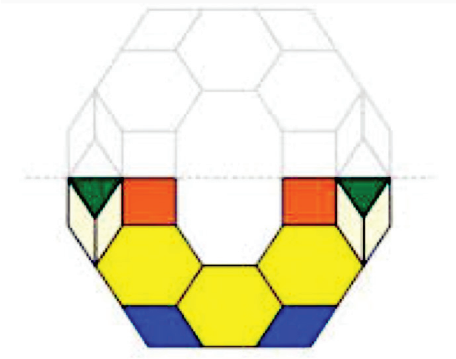
2. Observe as seguintes imagens e construa-as, recorrendo às peças dos blocos padrão:

3. Observe as seguintes sequências e represente os três termos seguintes:



4. Complete a imagem seguinte, de modo a que a mesma possua um eixo de simetria vertical e outro horizontal.



5. Observe o contorno das imagens seguintes e reproduza-as, usando os blocos padrão.

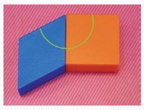
 

6. Usando as peças dos blocos padrão, construa polígonos côncavos e convexos.

7. Observe as seguintes peças dos blocos padrão e complete a tabela seguinte:

Peças dos Blocos Padrão	Amplitude dos ângulos internos
	
	
	
	
	
	

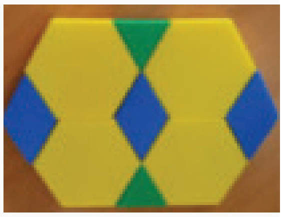
8. Complete a tabela:

Amplitude de um ângulo	Exemplo de construção
150º	
180º usando 2 peças	
180º usando 3 peças	
210º	
240º	
270º	
300º	

9. Compare a área de cada peça com a área das outras peças dos blocos padrão. Elabore uma tabela que mostre a relação entre as áreas das diferentes peças.

Nota: Não considere o quadrado nem o losango bege.

10. A Maria reparou que nos azulejos da sua casa de banho havia um hexágono. A Maria, recorrendo às peças dos Blocos Padrão, reproduziu esse polígono como se vê na figura ao lado.



Determine a medida da sua área, sabendo que a unidade de medida de área é:

a) Triângulo;
b) Losango azul;
c) Trapézio;
d) Hexágono.

11. Recorrendo aos blocos padrão, construa uma figura plana à sua escolha com $5\frac{2}{3}$ u.a., sendo a unidade de área a peça vermelha, o trapézio.

12. Utilize os blocos padrão para comparar as seguintes frações, desenhando as representações.

a) $\frac{1}{4}$ — $\frac{3}{8}$;

b) $\frac{3}{4}$ — $\frac{7}{8}$;

c) $\frac{4}{6}$ — $\frac{2}{3}$;

d) $\frac{1}{2}$ — $\frac{2}{3}$;

e) $\frac{2}{3}$ — $\frac{1}{5}$

13. A fração imprópria $\frac{10}{3}$ pode ser modelada através dos blocos padrão: crie dois modelos diferentes para essa fração

14. Utilize os blocos padrão para transformar os seguintes numerais mistos em frações impróprias:

a) $2\frac{1}{4}$;

b) $3\frac{3}{8}$;

c) $5\frac{5}{6}$.

15. Utilize os blocos padrão para transformar as seguintes frações impróprias em numerais mistos:

a) $\frac{7}{6}$;

b) $\frac{9}{4}$;

c) $\frac{5}{3}$;

d) $\frac{22}{7}$.

16. Resolva as seguintes expressões numéricas, recorrendo à modelação com blocos padrão:

a) $\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}$;

b) $1+\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$;

c) $: \frac{2}{3}; \frac{3}{2}$

d) $\frac{3}{2} : \frac{2}{3}$.

17. Modele e resolva o seguinte problema com os Blocos Padrão:

    Uma garrafa de sumo tem de um litro. Será essa quantidade suficiente para dar l ao Quitério, l à Ambrósia e l ao Sancho?

18. Construa com os blocos padrão:
    a) Um triângulo que seja um terço verde e dois terços vermelho.
    b) Um paralelogramo que seja três quartos azul e um quarto verde.
    c) Um paralelogramo que seja dois terços azul um terço verde.

5.7 **Tangram**

Os tangrans são habitualmente identificados como os mais antigos puzzles que se conhecem. O primeiro de que temos conhecimento foi inventado na China há mais de 4000 anos e transformou-se num puzzle muito popular no continente europeu durante o século IX.
Os tangrans obtêm-se a partir da divisão de uma figura geométrica de acordo com determinadas condições, o que permite a construção de novas figuras por recombinação das peças obtidas: este fundamento geométrico permite utilizá-lo em atividades de natureza lúdica, mas com intencionalidade didática.
Na Figura 8. encontram-se exemplos de dois tangrans.

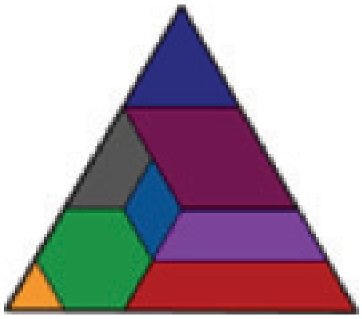


Figura 8. Tangram de Lloyd e Tangram triangular

Neste documento iremos focar-nos no tangram chinês, que, como veremos, pode ser um recurso muito valioso de apoio às atividades letivas destinadas à aprendizagem da Matemática no Ensino Primário e, até, em contexto pré-escolar.
O tangram chinês é constituído por 7 peças que resultam da divisão de um quadrado e pode ser obtido apenas por dobragens e recorte de um quadrado, não sendo necessária a utilização de qualquer outro material.

Figura 9. Tangram chinês

As sete peças deste tangram são 1 quadrado e 1 paralelogramo equivalentes e 5 triângulos semelhantes: 2 grandes geometricamente iguais, 1 médio e 2 pequenos geometricamente iguais.

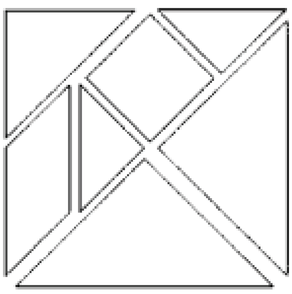


Figura 10. As sete peças do tangram chinês

Este tangram pode ser obtido apenas por dobragens e recorte de um quadrado, não sendo necessária a utilização de qualquer outro material:

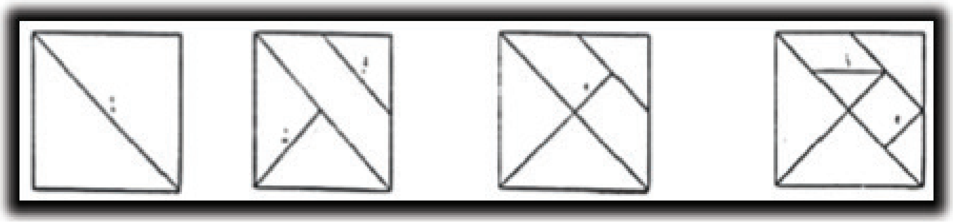


Figura 11. Construção do tangram chinês por dobragens

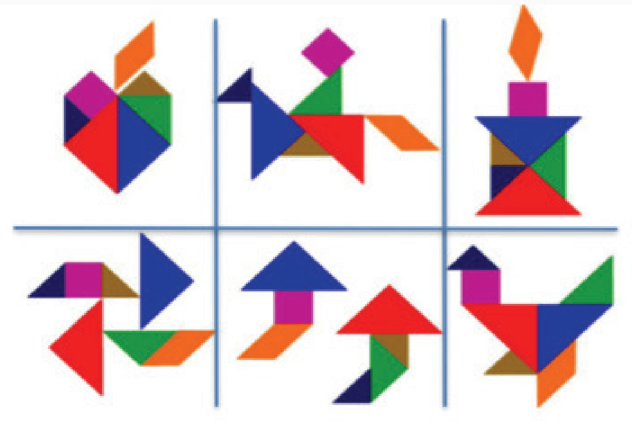
O interesse e a simplicidade desta construção resultam dela se basear exclusivamente na obtenção de diagonais e de pontos médios, podendo a sua construção ser uma tarefa adequada para propor numa aula a uma turma; no entanto, para alunos que se encontrem nas fases iniciais de aprendizagem matemática, poderá ser preferível optar pela disponibilização de um modelo semelhante ao da figura 3. para recorte pelos alunos, ou até mesmo fornecer já as sete peças do tangram (por exemplo, a crianças em idade pré-escolar).

Enquadramento Programático

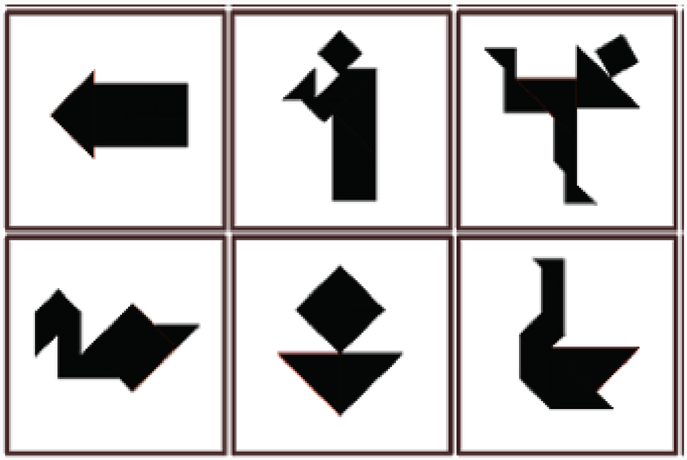
Este material pode ser trabalhado em contexto pré-escolar (4/5 anos) e também no Ensino Básico. A sua utilização permite introduzir, desenvolver e/ou consolidar conteúdos relacionados com os domínios dos Números e Operações – classificação e ordenação, contagens, padrões e sequências – e da Geometria e Medida – figuras geométricas, isometrias, pavimentações, homotetias, comprimentos, perímetros e áreas, ângulos. Para além disso, possibilita a resolução de problemas, estimula a criatividade e permite desenvolver a orientação e estruturação espacial.

Propostas de atividades

1. Com as setes peças do tangram chinês, obtenha as imagens abaixo:



2. Com as sete peças do tangram chinês, construa as seguintes figuras[6]:



3. "Reescreva" o seguinte texto, substituindo as palavras sublinhadas por figuras em que se utilizem sempre todas as peças do Tangram:

Numa bela casa vivia um <u>miúdo</u>, com o seu <u>cão</u>.
Este miúdo era muito alegre e gostava de <u>dançar</u>.
Mas certo dia o seu cão fugiu de <u>casa</u>!
E o <u>miúdo</u> estava muito <u>triste</u>.

[6] Esta atividade apresenta um grau de complexidade bastante superior à do exemplo anterior, dado não ser possível identificar a composição das peças que produz as figuras fornecidas.

4. Determine a área de cada uma das peças do tangram chinês:
   a) utilizando o triângulo pequeno como unidade de área.
   b) utilizando o triângulo grande como unidade de área.
   c) utilizando o quadrado como unidade de área.
   d) complete a seguinte tabela:

		Medida da área do …				
		Triângulo pequeno	Triângulo médio	Triângulo grande	Quadrado	Paralelogramo
Unidade de área	Triângulo pequeno					
	Triângulo médio					
	Triângulo grande					
	Quadrado					
	Paralelogramo					

5. Com as sete peças do tangram chinês:

5.1 Construa:
   a) Um triângulo.
   b) Um retângulo.
   c) Um trapézio.

5.2 Determine a área de cada uma das figuras construídas. O que pode concluir?

5.3 E o que conclui relativamente ao perímetro de cada figura?

6. Relativamente às seguintes figuras:

   a) Represente a parte vermelha utilizando frações.
   b) Em cada uma, pinte $\frac{3}{8}$ a cor azul e $\frac{3}{4}$ a cor verde.

7. Utilizando como unidade a área o triângulo, determine a área a vermelho nas duas seguintes figuras:

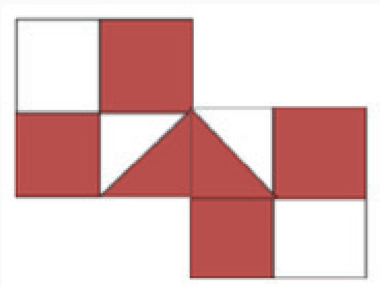


Figura A

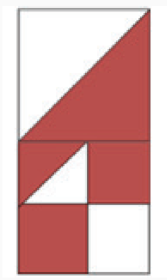
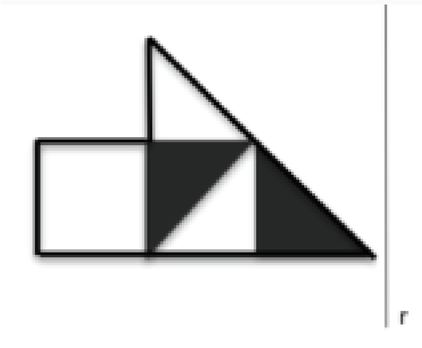


Figura B

8. Observe atentamente o polígono representado em seguida:

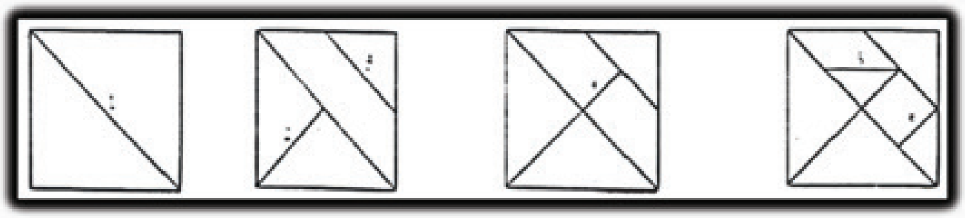


a) Classifique-o quanto ao número de lados.
b) Este polígono é côncavo ou convexo?
c) Represente a parte escura utilizando frações.
d) Determine a sua área, utilizando como unidade:
    i. A área do triângulo pequeno.
    ii. A área do quadrado.
    iii. A área do triângulo grande.
e) Construa a sua reflexão relativamente ao eixo r.

9. Classifique todos os ângulos internos de cada peça do tangram chinês.

10. Quantos triângulos diferentes é possível construir:
a) Com três peças do tangram?
b) Com quatro peças do tangram?

11. Com uma folha de papel, obtenha as sete peças do tangram chinês por dobragens:

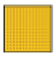


Sugestão: Visualize o vídeo disponível em https://www.youtube.com/watch?v=mNzurC0qVQw .

5.8 **Poliminós**

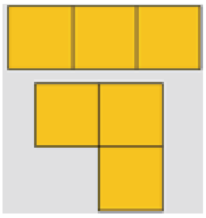
O termo poliminó foi lançado pela primeira vez por Solomon W. Golomb, em 1953, no Clube de Matemática da Universidade de Harvard.
Os poliminós foram divulgados a partir de 1957 pela coluna de Martin Gardner no Jornal Scientific American. Desde essa época diversos grupos de estudantes de vários níveis de ensino e de professores participam em discussões sobre os poliminós.
Os poliminós são figuras planas formadas pelos agrupamentos de um número n de quadrados congruentes justapostos com pelo menos um lado comum. São classificados segundo o número de quadrados que compõem cada figura: monominó (1), dominó (2),
triminó (3), tetraminó (4), pentaminó (5), hexaminó (6), …, n-minó (formado por um número n de peças). Os pentaminós são associados com letras para facilitar a sua identificação.
Os poliminós que são imagem de outro mediante uma rotação ou uma reflexão são considerados figuras iguais.

Monominó: O monominó é formado por apenas um quadrado, portanto quanto à forma existe apenas um monominó:

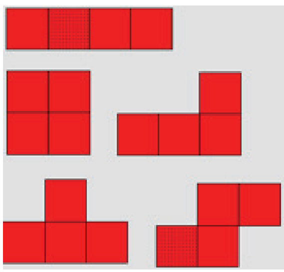


Dominó: O dominó é formado por dois quadrados dispostos lado a lado. Como não contamos a rotação como sendo outra forma, temos apenas uma forma de dominó:

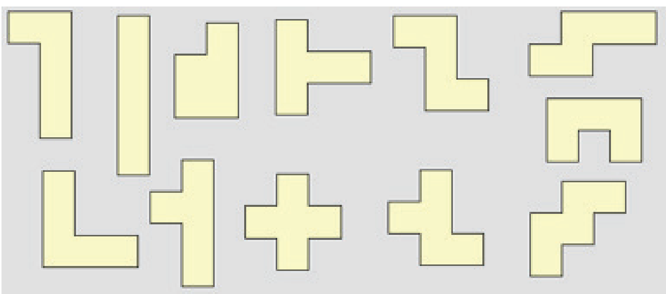
Triminó: No caso do triminó, temos a formação feita por três quadrados. Assim temos duas formas de triminó:



Tetraminó: No tetraminó, temos quatro quadrados, e agora temos cinco formas de os reunir:



Pentaminó: Os pentaminós são formados por cinco quadrados, sendo que o número de formas é 12:

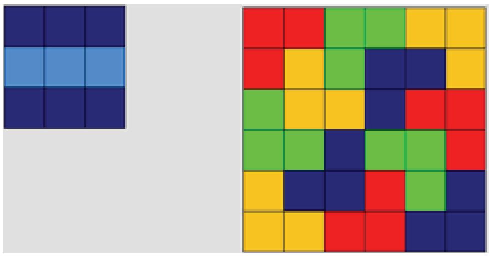


Enquadramento Programático

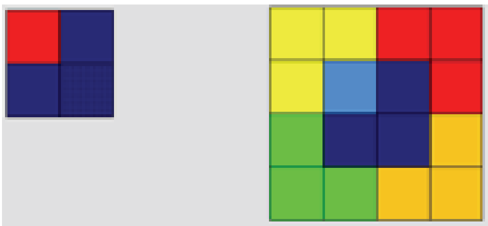
Os poliminós possibilitam o estudo de questões relacionadas com a Geometria, a Aritmética e a Análise Combinatória. Também desenvolve a perceção espacial, o raciocínio lógico e o sentido estético. A sua utilização ajuda na compreensão e na exploração de conceitos de semelhança, simetria, perímetro e área. O material favorece ainda o desenvolvimento dos processos de classificação, ordenação e descoberta de padrões.
Entre os poliminós o trabalho é realizado essencialmente com pentaminós. Esta escolha é feita devido ao número de peças formadas, pois trabalhar com monominós, dominós ou tetraminós torna o trabalho pouco enriquecedor e também menos inovador, devido ao conhecimento prévio das mesmas peças em outros jogos. Já com os hexaminós, heptaminós e os demais poliminós, a impossibilidade de trabalho pode decorrer da exigência de uma grande quantidade de peças: por exemplo, como existem 35 hexaminós diferentes, torna-se mais difícil a sua aplicação.

Exemplos de atividades

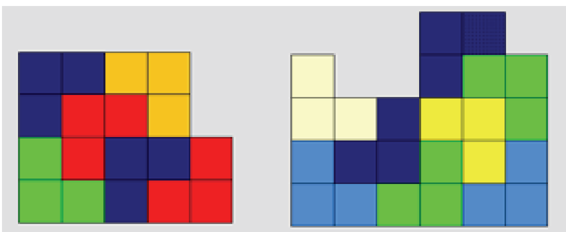
Atividade 1: Formação de quadrados 3x3 e 6x6 com cópias congruentes dos triminós.



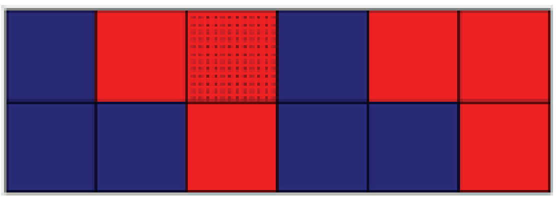
Atividade 2: Formação de quadrados com o menor número possível de triminó L e um monominó.



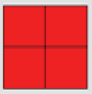
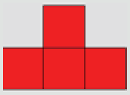
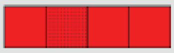
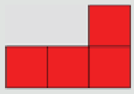
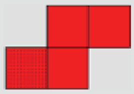
Atividade 3: Construção de polígono côncavo com cópias congruentes do triminó L.



Atividade 4: Formação de um retângulo semelhante ao triminó I com o menor número possível de triminó L.

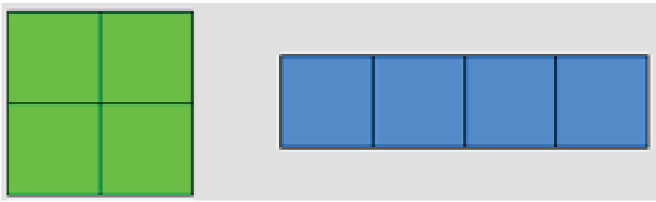


Atividade 5: Classificação dos tetraminós pelo número de lados e pelo número de vértices.

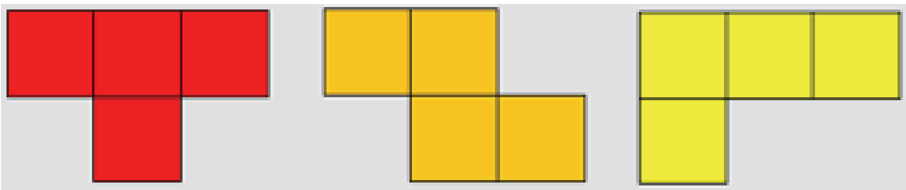
Tetraminó					
Letra de apresentação	Q	T	I	N	L
Lados	4	8	4	8	6
Vértices	4	8	4	8	6

Atividade 6: Classificação dos tetraminós pela convexidade.

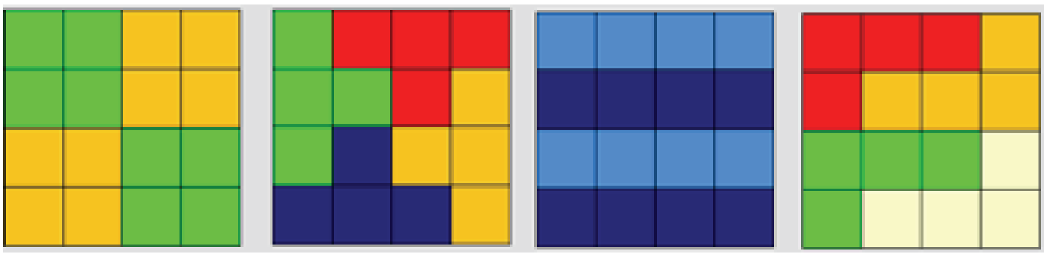
Polígonos Convexos



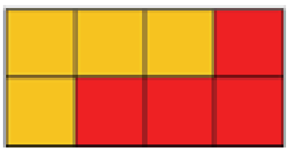
Polígonos Côncavos



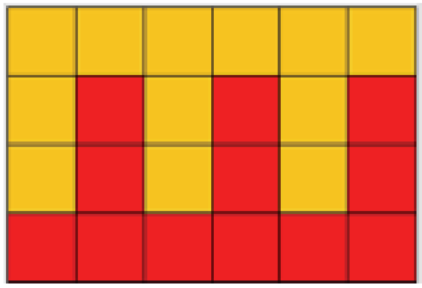
Atividade 7: Formação de quadrados 4x4 com o menor número possível de cópias de cada tetraminó.



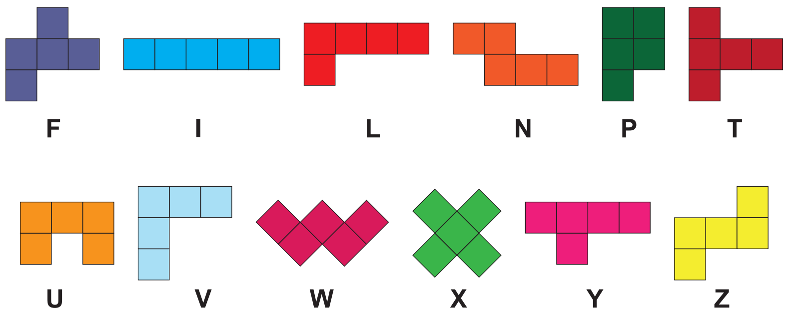
Atividade 8: Construção de um retângulo 2x4 com tetraminós.



Atividade 9: Construção de um retângulo 4x6, formado por seis L.

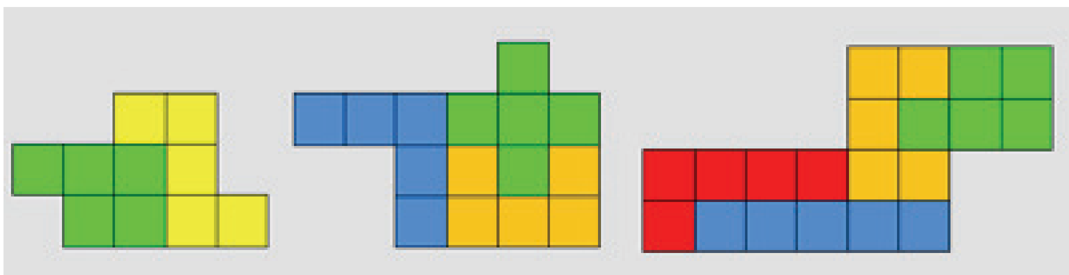


Atividade 10: Representação e identificação dos pentaminós. Identificação do número de lados e do número de vértices.

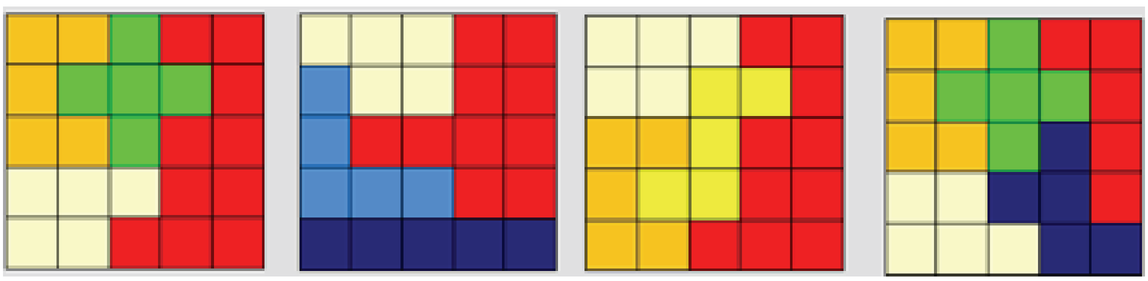


Pentaminós	F	I	L	N	P	T	U	V	W	X	Y	Z
Lados	10	4	6	8	6	8	8	6	10	12	8	8
Vértices	10	4	6	8	6	8	8	6	10	12	8	8

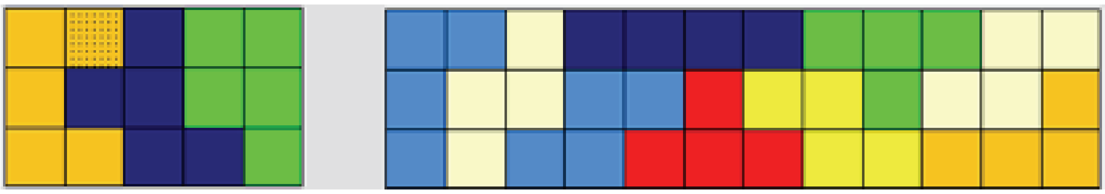
Atividade 11: Construção de polígonos côncavos com 2, com 3 e com 4 pentaminós.



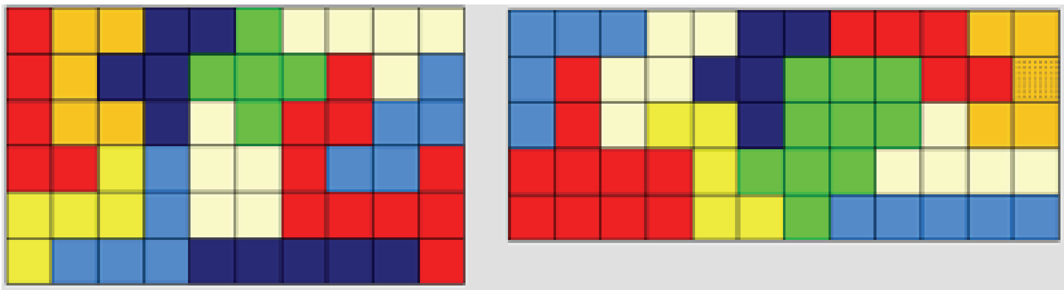
Atividade 12: Formação de quadrados com lados a medir cinco unidades, ou seja, quadrados 5x5.



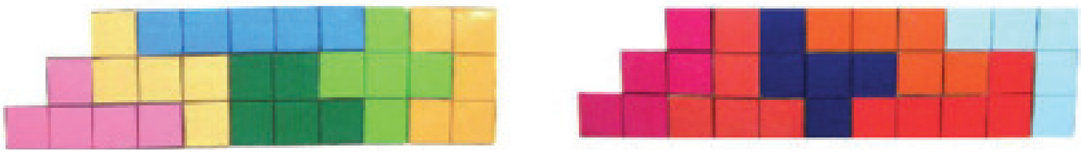
Atividade 13: Construção de retângulos com pentaminós.



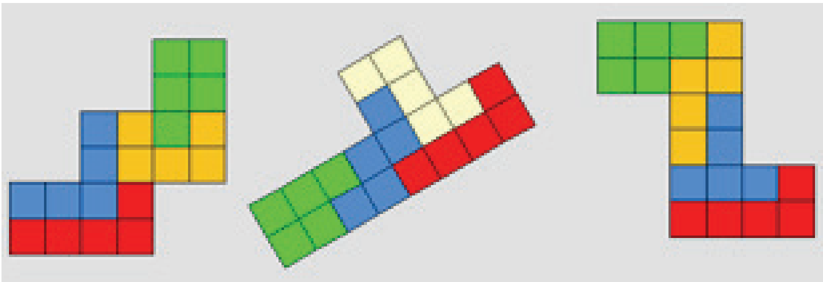
Atividade 14: Construção de retângulos usando todos os 12 pentaminós.



Atividade 15: Representação de pares de figuras congruentes construídas com dois conjuntos diferentes de seis pentaminós.



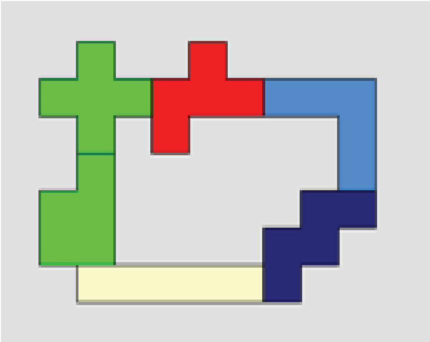
Atividade 16: Duplicação dos pentaminós: selecionar um pentaminó e, com outras quatro peças, construir uma figura semelhante à peça selecionada (o pentaminó original não pode ser uma das quatro peças).



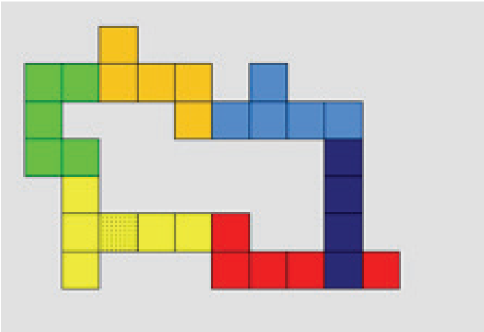
Atividade 17: Construção de retângulos com determinada área.

$A=45u^2$ e $A= 55u^2$

Atividade 18: Construção de uma vedação com forma arbitrária em volta do maior campo poligonal possível, com seis pentaminós diferentes. Em cada caso, procedeu-se ao cálculo da área **A** da superfície poligonal cercada pelas peças, cálculo do perímetro interno $\mathbf{P_i}$ e do perímetro externo $\mathbf{P_e}$ da vedação.

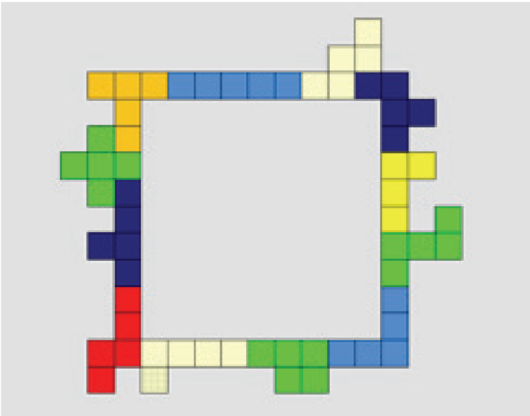


A=20u² **P_i=22u** **P_e=36u**



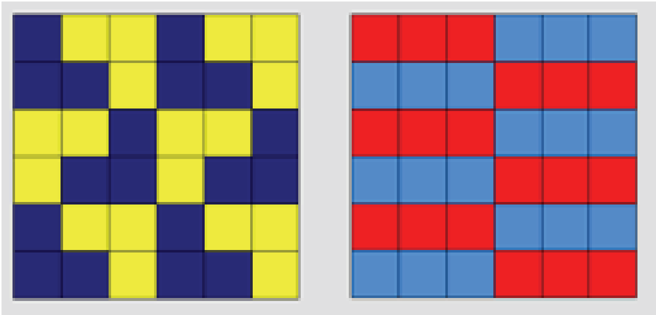
A=17u² **P_i=22u** **P_e=38u**

Atividade 19: Construção de uma vedação em volta do maior campo quadrangular possível, com os doze pentaminós. Cálculo da área A da superfície quadrangular cercada pelas doze peças. Cálculo do perímetro interno $\mathbf{P_i}$ e do perímetro externo $\mathbf{P_e}$ da vedação.

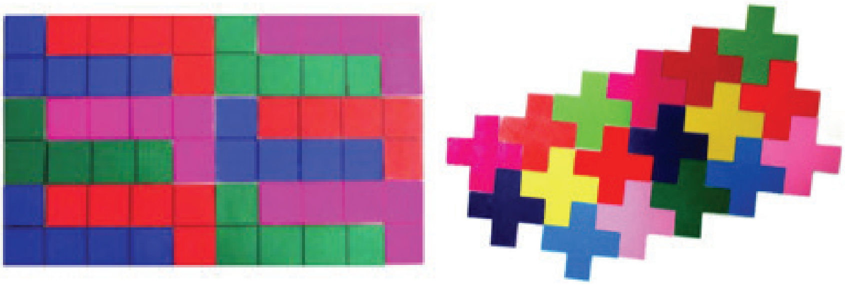


A=81u² **P_i= 36u** **P_e=72u**

Atividade 20: Representação de diferentes pavimentações do plano, cada uma delas formada com cópias congruentes de um triminó.



Atividade 21: Exemplos de construção de pavimentações monoédricas do plano com cada um dos pentaminós.



Propostas de atividades

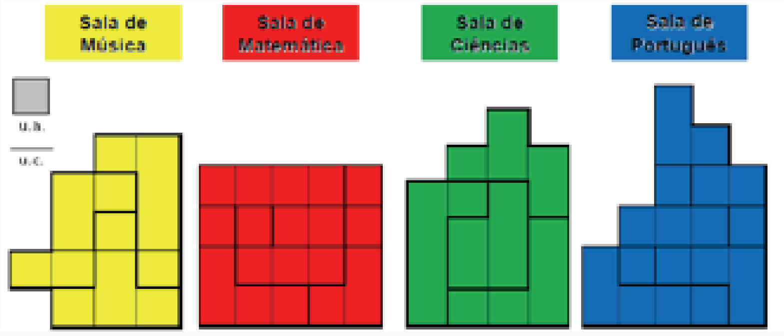
1. A Joana está a preparar as mesas para a sua festa de aniversário. Tem 5 mesas com o tampo quadrado e quer juntá-las para que cada mesa fique totalmente encostada a, pelo menos, uma outra mesa. De quantas formas diferentes poderá a Joana colocar as mesas?[7]

2. Com pentaminós, construa um retângulo com perímetro igual a 16 unidades de comprimento, considerando que a unidade de comprimento é o lado de um quadrado.

3. Com pentaminós, construa uma figura geométrica com 30 unidades de área, sendo a unidade de área um quadrado.

4. Com pentaminós, construa uma figura geométrica com 15 unidades de área e 16 unidades de comprimento, considerando o quadrado como unidade de área e o lado desse quadrado como unidade de comprimento.

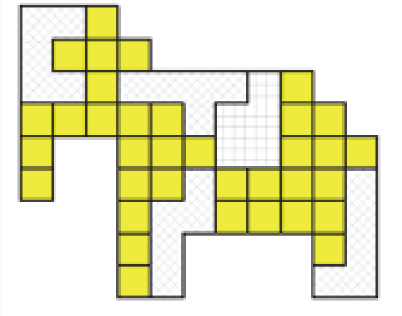
5. Numa escola, cada sala tem cor e forma diferente, de acordo com a disciplina:[8]



5.1 Calcule o perímetro de cada sala.
5.2 Calcule a área de cada sala.
5.3 Compare os resultados obtidos. Que conclui?

6 Observe a seguinte sequência construída com pentaminós e desenhe os seus cinco termos seguintes.

7 Observe o seguinte elefante:[9]



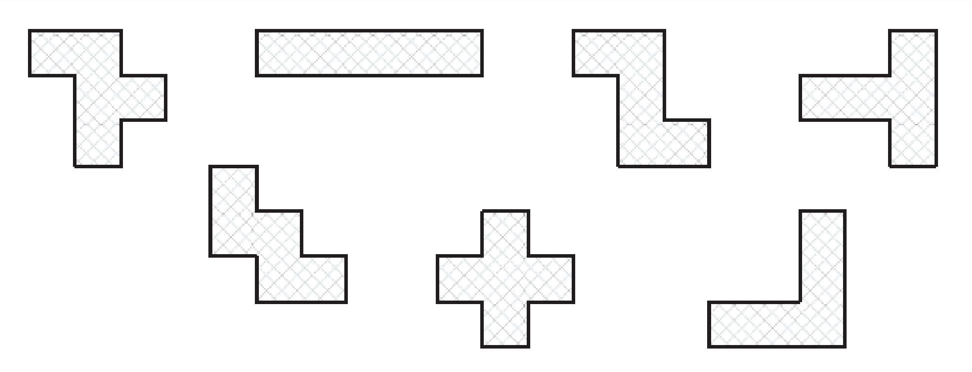
[7] Atividade adaptada de uma ação de formação da Areal Editores, ministrada por Berta Alves.
[8] Atividade adaptada dos blogues de Helena Borralho e Vaz Nunes.
[9] Atividade adaptada do Programa de Formação Contínua em Matemática da Escola Superior de Educação de Coimbra.

7.1 Como pode verificar estão apenas colocados cinco pentaminós, faltam, assim, colocar os sete pentaminós, em baixo representados, na zona amarela para o elefante ficar totalmente preenchido com as doze peças dos pentaminós. Como colocaria estes sete pentaminós? Faça um desenho no próprio elefante.

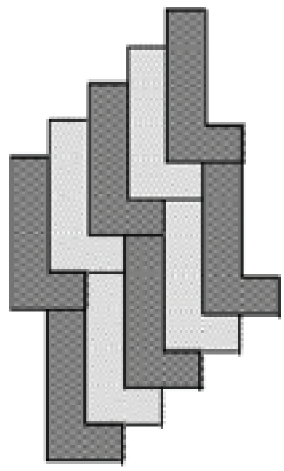
7.2 Se a unidade de área for um quadrado, qual é a medida da área do elefante? E se a unidade de área for cinco quadrados, qual é a medida da área do elefante?

8 Com qualquer número de pentaminós construa uma figura simétrica.

9 Para cada um dos pentaminós, verifique em quantas posições diferentes ele pode ser colocado. Verifique também se ele tem ou não eixos de simetria e quantos tem. Registe as suas conclusões numa tabela.[10]
Discuta de que modo é que as conclusões a que chegou lhe permitem tirar ilações sobre quais os pentaminós que deve deixar para o fim sempre que quer fazer uma determinada figura.



10 Alguns pentaminós podem ser usados para pavimentar o plano usando apenas translações (como se mostra na figura), enquanto que outros necessitam de mais algumas transformações geométricas para que seja possível cobrir toda uma superfície sem deixar espaços abertos.
E existirá algum pentaminó que não pavimente?
Experimente e apresente as suas conclusões, mostrando as pavimentações que descobriu para cada um dos pentaminós.[5]



11 Forme retângulos com o menor número possível de triminó I ou de triminó L, indicando a área dos quadriláteros.

12 Construa quadrados 4x4 com cópias de dois ou mais tipos diferentes de tetraminós.

13 Forme quadrados com os 12 pentaminós e com o tetraminó Q no centro do quadrado.

14 Duplicação de pentaminós: selecione um pentaminó e com outras nove peças obtenha uma figura semelhante à peça que escolheu.

NOTAS: - O pentaminó original não é uma das nove peças.
- Esta duplicação pode ser realizada para cada um dos doze pentaminós.

15 Construa diferentes frisos no plano, cada um deles formado com cópias congruentes de dois ou mais pentaminós.

[10] Atividades adaptadas do Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do 1.º Ciclo da Universidade de Évora (2007-2008).

6. Planificação com materiais manipuláveis

Neste capítulo são apresentadas duas propostas de planificação para aulas de Matemática de dois anos distintos do Ensino Básico, e em que está prevista a utilização de materiais manipuláveis como suporte às atividades a desenvolver.

PLANIFICAÇÃO
Classe: 3.ª **Duração:** 60 minutos **Material Manipulável:** Blocos Padrão **Domínio:** Geometria e Medida **Objetivos:** estudar a grandeza área; compreender o que se entende por medir a área de uma superfície.
Conhecimentos prévios: Domínio: Geometria e Medida Objetivos: reconhecer figuras geométricas em diferentes posições; reconhecer a necessidade de se escolher uma unidade para efetuar uma medição; registar medições de uma grandeza utilizando diferentes unidades de medida.
Descrição das atividades: **Atividade 1**: Exploração livre do material manipulável blocos padrão. **Atividade 2:** Partindo da sobreposição das diferentes peças do material blocos padrão, qual é a relação entre o: a) hexágono e o triângulo? b) trapézio e o triângulo? c) losango e o triângulo? d) trapézio e o hexágono? e) losango e hexágono? Nota: Considerar apenas as peças triângulo verde, losango azul, trapézio vermelho e hexágono amarelo. **Atividade 3:** Com as peças triângulo verde, losango azul, trapézio vermelho e hexágono amarelo dos blocos padrão, constrói uma flor. **Atividade 4:** Determina a área da figura geométrica construída na atividade 3, sabendo que a unidade de área é: a) o triângulo; b) o losango; c) o trapézio; d) o hexágono. **Atividade 5:** Identifica o motivo pelo qual as medidas de área obtidas na atividade anterior são diferentes, embora a área da flor seja sempre a mesma.
Explicação do processo de intervenção: 1. Realização da atividade 1- Exploração livre do material manipulável blocos padrão. (Duração prevista: 10 minutos). 2. Realização da atividade 2. (Duração prevista: 15 minutos). a) Conhecimento das peças selecionadas dos blocos padrão. b) Estabelecimento de relações entre as diferentes peças selecionadas dos blocos padrão. c) Registo no caderno diário das conclusões tiradas. 3. Realização da atividade 3. (Duração prevista: 15 minutos). a) O docente circula pela sala e, simultaneamente, apoia, de forma individual, os alunos na realização da atividade proposta. b) Após observação das diferentes flores obtidas pelos alunos, o docente solicita que os alunos partilhem as suas construções. c) De seguida, a turma elege uma das flores construídas, para se passar à realização das atividades seguintes. 4. Realização das atividades 4 e 5, pela ordem apresentada. (Duração prevista: 20 minutos). a) O docente apoia individualmente os alunos, indo aos seus lugares de trabalho. b) Registo, no caderno diário, da conclusão obtida após a realização da atividade 5.

PLANIFICAÇÃO

Classe: 4.ª
Duração: 45 minutos
Material Manipulável: MAB
Domínio: Números e Operações
Objetivos: compreender os números decimais - efetuar operações com decimais, ler e escrever numerais decimais; resolver situações problemáticas que envolvam as operações com numerais decimais.

Conhecimentos prévios:
Domínio: Números e Operações
Objetivos: compreender o mecanismo da numeração decimal; resolver situações problemáticas que envolvam as operações estudadas.

Descrição das atividades:
Atividade 1: Considerando que uma placa do MAB representa uma unidade, representar, com este material, os seguintes números decimais: a) 0,08 b) 2,4 c) 24,48
Atividade 2: Resolver a seguinte situação problemática. Se achares que te ajuda, podes recorrer à manipulação do material MAB:

> *O João tem uma tira de tecido azul com 148,5 cm de comprimento.*
> *A sua mãe deu-lhe uma tira de tecido amarelo com 56,5 cm de comprimento.*
> *No total, qual é o comprimento total das tiras de tecido?*

Atividade 3: Resolver a seguinte situação problemática. Se achares que te ajuda, podes recorrer à manipulação do material MAB:

> *O Timóteo tinha no seu porta-moedas 10,46 euros. Com esse dinheiro, comprou um livro que custou 5,5 euros. Do dinheiro que sobrou deu metade à sua irmã Dulcineia.*
> *Quanto dinheiro recebeu a Dulcineia?*

Explicação do processo de intervenção:
Nota: Os alunos já estão habituados a trabalhar com o material manipulável MAB.

1. Realização da atividade 1 (Duração prevista: 10 minutos).
   Após realização da atividade 1, individualmente, o professor discute as soluções apresentadas pelos alunos, em grande grupo, apresentando a solução da referida atividade.
2. Realização da atividade 2. (Duração prevista: 10 minutos).
   Após realização da atividade 2, individualmente, o professor discute as soluções apresentadas pelos alunos, em grande grupo, apresentando a solução da referida atividade.
3. Realização da atividade 3. (Duração prevista: 25 minutos).
   a) O docente solicita a realização da atividade 3, em pares.
   b) O docente circula pela sala e, simultaneamente, apoia os alunos na realização da atividade proposta.
   c) Discussão em grande grupo da resolução da atividade 3.

Bibliografia consultada

Bourdenet, G. (2007). *Le calcul mental. Activités mathématiques et scientifiques* (n.º 61, pp. 5–32.). Strasbourg: IREM.

Buys, K. (2001). Progressive mathematization: sketch of a learning strand. In *J. Anghileri (Ed.), Principles and Practices in Arithmetic Teaching – Innovative Approaches for the Primary Classroom* (pp. 107–118). Buckingham: Open University Press. Erlauder, L. (2005). *Práticas pedagógicas compatíveis com o cérebro*. Porto: ASA.

Fernandes, D., Lester, F., Borralho, A. & Vale, I. (1997) (Coords.). *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática – Múltiplos Contextos e Perspectivas*. Aveiro: GRIP.

Godino, J. (Dir). (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Granada: Universidad Granada.

Lopes, A., Bernardes, A, Loureiro, C., Varandas, M.J., Delgado, M.J., Bastos, R. & Graça, T. (1992). *Actividades matemáticas na sala de aula*. Porto: Texto Editora.

Lopes, C. A. (2002). *Estratégias e métodos de resolução de problemas em Matemática*. Cadernos do CRIAP, nº 33. Porto: ASA.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Palhares, P (Coord.) (2004). *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico*. Lisboa: LIDEL.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Smith, M., & Stein, M. K. (2011). *Five practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Vale, I. & Pimentel, T. (2012). Um novo-velho desafio: da resolução de problemas à criatividade em matemática. In Ana Paula Canavarro, Leonor Santos, Ana Maria Boavida, Hélia Oliveira, Luís Menezes, Susana Carreira (Eds.) *Investigação em Educação Matemática 2012 – Práticas de ensino da Matemática* (pp. 347-359). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

.

USTP
UNIVERSIDADE DE SÃO TOMÉ E PRÍNCIPE
Instituto Superior de Educação e Comunicação

MEES
Ministério da Educação e Ensino Superior
República Democrática de São Tomé e Príncipe